In geometria con il termine omotetia è una trasformazione geometrica possibile sia nel piano che nello spazio che permette di "comprimere" o "dilatare" un oggetto senza variare forma e angoli.

Consideriamo, per esempio, i seguenti punti:

$$A = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad B = \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \quad C = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

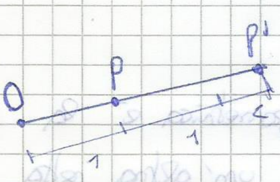
si vuole determinare i punti A', B', C' nella omotetia seguente:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Quindi:

$$A' = \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}, \quad B' = \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}, \quad C' = \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Si consideri la seguente situazione:



c = rapporto di omotetia

O = centro dell'omotetia

Possiamo scrivere:

$$c = \frac{OP'}{OP} \Rightarrow \begin{cases} x' = cx \\ y' = cy \end{cases}$$ (partendo dal centro del piano cartesiano)

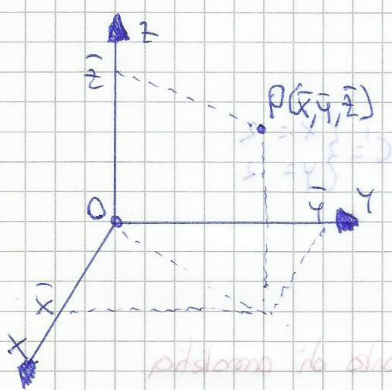
Se l'omotetia ha un centro $C(x_0, y_0)$ con:

$$\begin{matrix} x_0 \neq 0 \\ y_0 \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = cx + x_0(1-c) \\ y' = cy + y_0(1-c) \end{cases}$$

Vediamo brevemente dei casi particolari:

- $k > 0$ → omotetia diretta
- $k < 0$ → omotetia inversa
- $k = 1$ → identità
- $k = -1$ → simmetria centrale.

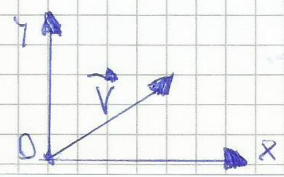
L'omotetia è una trasformazione affine. Per chiarire questo concetto è bene definire il concetto di spazio Euclideo. Lo spazio euclideo è una rappresentazione di uno spazio tridimensionale.



Un altro esempio di trasformazione geometrica è la collineazione che consente di cambiare una retta in un'altra retta. Una isometria è una trasformazione geometrica che consente di conservare le distanze:

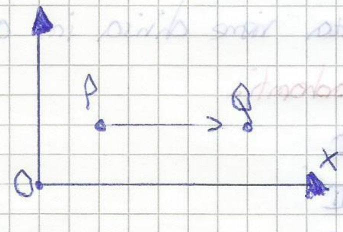
$$d(A,B) = d(f(A), f(B)) \qquad f = \text{trasformata isometrica.}$$

Ogni isometria è una collineazione e la composizione di due isometrie è una isometria. Consideriamo ora il generico vettore $\vec{v}$:

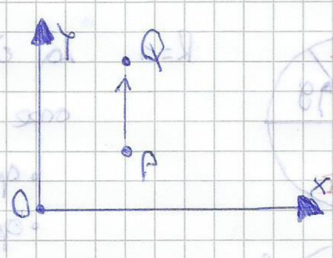


Si ricordi che un vettore è caratterizzato da un modulo, un verso ed una intensità.

Una traslazione su un piano, partendo da un punto P, è la giungere ad un punto Q spostato rispetto a P o lungo l'asse X o lungo l'asse y o lungo entrambe.



Traslazione orizzontale lungo l'asse x



Traslazione verticale lungo l'asse y.

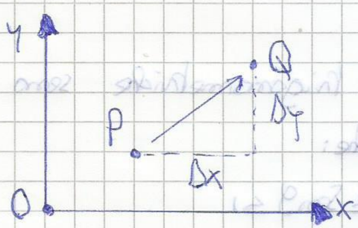
Per la traslazione orizzontale si ha:

$$\begin{cases} x_Q = x_P + \Delta x \\ y_Q = y_P \end{cases}$$

Per la traslazione verticale si ha:

$$\begin{cases} x_Q = x_P \\ y_Q = y_P + \Delta y \end{cases}$$

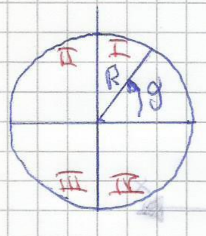
Infine la traslazione può essere obliqua:



$$\begin{cases} x_Q = x_P + \Delta x \\ y_Q = y_P + \Delta y \end{cases}$$

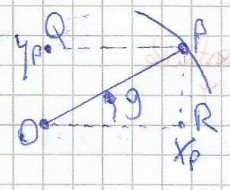
Una rotazione è una trasformazione più complicata rispetto alla traslazione. Per poter spiegare la rotazione è necessario introdurre la trigonometria.

La trigonometria mette in relazione la geometria piana con l'analisi matematica. Consideriamo la seguente circonferenza goniometrica ossia una circonferenza di raggio unitario:



$R=1$. La circonferenza viene divisa in quattro aree dette quadranti.

- quadrante I
- quadrante II
- quadrante III
- quadrante IV



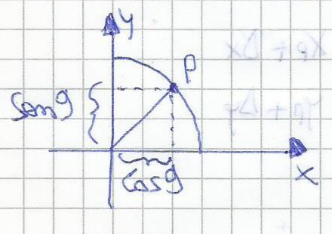
Le due grandezze trigonometriche fondamentali sono: seno, coseno. Si definisce seno dell'angolo g il seguente rapporto:

$$\text{Sen}(g) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} = y_P$$

Analogamente:

$$\text{Cos}(g) = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \overline{OR}/1 = \overline{OR} = x_P$$

Quindi graficamente si ha:



Le funzioni trigonometriche seno e coseno sono tali che:

$0 \le \text{Sen}\, g \le 1$

$0 \le \text{Cos}\, g \le 1$

Inoltre:

$g = 0 \Rightarrow \text{Cos}\, g = 1$ e $\text{Sen}\, g = 0$ come per $g = \pi$ ($\text{Cos}\, \pi = -1$)

$g = \pi/2 \Rightarrow \text{Sen}\, g = 1$ e $\text{Cos}\, g = 0$; Per $\frac{3}{2}\pi \Rightarrow \text{Sen}\, g = -1$.

Le funzioni trigonometriche seno e coseno sono funzioni periodiche con periodo T:

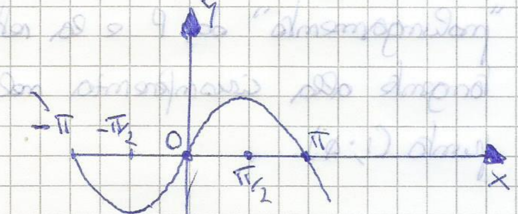
$$T = 2\pi$$

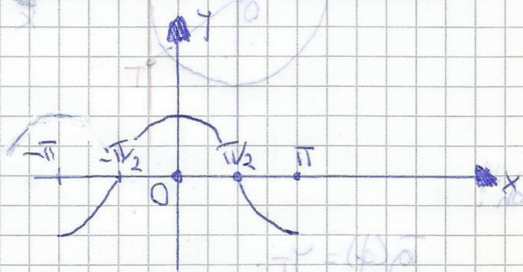
Da questa condizione ne deduciamo che:

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha + 2k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Di seguito vengono mostrati i grafici della funzione seno e della funzione coseno.





Vediamo le proprietà della funzione seno:

- dominio: $[-\infty \ +\infty]$
- è una funzione dispari
- È una funzione periodica
- È una funzione continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R}$.

Si ricordi che una funzione dispari è una funzione tale per cui:

$$f(-x) = -f(x)$$

Una funzione pari è una funzione tale per cui:

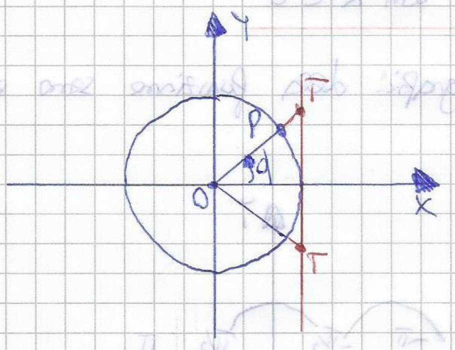
$$f(-x) = f(x)$$

La funzione coseno è una funzione pari e gode delle stesse proprietà del seno.

Per il teorema fondamentale della trigonometria si ha:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Vediamo ora la funzione tangente e cotangente. Riconsideriamo la precedente circonferenza goniometrica:



Si definisce tangente dell'angolo α l'ordinata del punto T data dall'intersezione della retta "prolungamento" di P e la retta tangente alla circonferenza nel punto $(1;0)$.

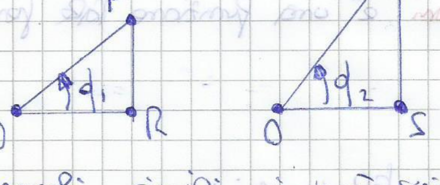
Quindi:

$$Tg(\alpha) = Y_T.$$

Si può anche definire la tangente dell'angolo α come:

$$Tg(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \forall\, \alpha \neq 90^\circ + k180^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Dimostriamo quest'ultima espressione. Consideriamo 2 triangoli rettangoli:



Ipotesi: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Essendo triangoli simili si può scrivere:

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{OR}} \Rightarrow \frac{Tg(\alpha)}{1} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow Tg(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$