

Definiamo il concetto di **insieme**. Un insieme indichiamo una collezione di oggetti aventi almeno una proprietà in comune. Esempi banali di insiemi sono: l'insieme dei libri di una biblioteca, l'insieme delle città di una nazione e così via. I libri della biblioteca, le città della nazione sono gli **elementi** dell'insieme.

Soltanto per indicare gli insiemi si usano le lettere maiuscole, mentre per indicare gli elementi si usano le lettere minuscole. È possibile rappresentare un insieme graficamente tramite i **diagrammi di Venn**:



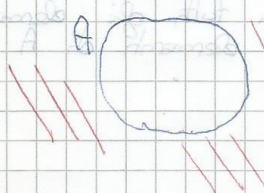
Come si può notare 'x' e 'y' sono elementi dell'insieme A, mentre 'z' non è un elemento dell'insieme A. Nella **teoria classica degli insiemi** prendere una in considerazione soltanto insiemi **unicamente definiti** ossia insiemi in cui sarà sempre possibile stabilire se un elemento appartiene o meno all'insieme dato. Formalmente possiamo indicare che 'x' e 'y' sono elementi dell'insieme A in questo modo:

$$x, y \in A$$

dove con $\in$ indichiamo il simbolo di appartenenza, mentre con $\notin$ indichiamo il simbolo di non appartenenza:

$$z \notin A$$

Tutto ciò che è esterno all'insieme dato va sotto il nome di **complemento**. Graficamente si ha:



Se indichiamo con $\bar{A}$ il complemento di A si può scrivere:

$$x, y \notin \bar{A} \text{ ma } z \in \bar{A}$$

Ovviamente vale la seguente **proprietà involutoria**:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

(2)

(30)

ossia l' complementare del complementare di un insieme è l'insieme stesso. Penultimo nella teoria classica degli insiemi un elemento appartiene ad un insieme o appartiene al suo complementare.

Due insiemi A e B si dicono **uguali** e si scrive:

$$A=B$$

se e soltanto se hanno gli stessi elementi. Per esempio:

$$A = \{x, y, z\}$$

$$B = \{y, x, z\}$$

$$\text{allora } A=B$$



Si noti che nell'ordine in cui sono elencati gli elementi non ha importanza. Per esempio:

$$A = \{x, y\}$$

$$B = \{x, y, z\}$$

$$\text{allora } A \neq B \text{ ossia } A \neq B$$

Indichiamo poi con $\emptyset$ l'insieme vuoto ossia l'insieme privo di elementi. Consideriamo ora la seguente situazione:



L'insieme B è un **sottinsieme proprio** di A ossia tutti gli elementi di B sono anche elementi di A , ma ci sono elementi di A che non sono elementi di B . Formalmente si scrive:

$$B \subset A$$

dove il simbolo ' $\subset$ ' è detto **simbolo di inclusione stretta**. Quando non si esclude la possibilità che $A=B$ si può usare il **simbolo di inclusione** che si scrive:

$$B \subseteq A$$

Si noti che $\emptyset$ è sottinsieme di ogni insieme. Quando vogliamo rappresentare un insieme tramite la proprietà che hanno in comune gli

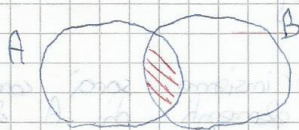
elementi possiamo usare la seguente relazione totale:

$$A = \{x : x < 10\}$$

$$\{x \in A : x < 10\} = A$$

ossia l'insieme A è composto da tutti quei numeri minori di 10. I due punti indicano la relazione "totale". Vediamo ora le operazioni insiemistiche:

1) Intersezione : $A \cap B$



L'intersezione tra A e B forma un insieme composto da tutti gli elementi appartenenti sia ad A che a B .

Quindi formalmente si può scrivere:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Vediamo degli esempi:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\} \\ B &= \{a, c, g\} \end{aligned} \quad \text{allora} \quad A \cap B = \{a, c\}$$

• mostriamo che se $C = \{e, g, m, n, p\}$ allora si ha:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Esempio $A \cap B = \{a, c\}$ e $(A \cap B) \cap C = \{c\}$ allora se $B \cap C = \{c, g\}$

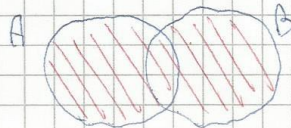
$$\text{si ha: } A \cap (B \cap C) = \{c\} = (A \cap B) \cap C.$$

Se A e B sono due insiemi disgiunti allora:

$$A \cap B = \emptyset$$



2) Unione : $A \cup B$



L'unione tra A e B forma un insieme di elementi che appartengono solo ad A o solo a B o ad entrambi.

Formalmente si ha:

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

Vediamo degli esempi:

- $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, c, g\}$ allora $A \cup B = \{a, b, c, d, g\}$

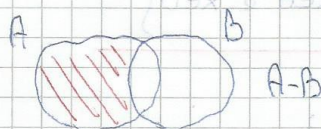
3) Differenza insiemistica: $A - B = \{x: x \in A, x \notin B\}$



Quindi l'insieme sono composto da tutti gli elementi di A che non appartengono a B.

È facile verificare che:

- $A - B = A \cap \bar{B} = \bar{B} - \bar{A}$



$A - B$



$A \cap \bar{B}$



$\bar{B} - \bar{A}$

- $A - B = \emptyset$ se $A \subseteq B$

- $A - B = B - A$ se $A = B$

- $A - B = A$ se $A \cap B = \emptyset$

Vediamo degli esempi:

- dimostrare che: $A - B = A \cap \bar{B} = \bar{B} - \bar{A}$

$$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \cap \bar{B} = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\bar{B} - \bar{A} = \{x: x \notin \bar{A} \wedge x \in \bar{B}\}$$

Vediamo ora alcune proprietà fondamentali delle operazioni insiemistiche:

1) $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$

2) $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

3) $A \cup \bar{A} = U$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$

4) $A \cup U = A$ e $A \cap U = A$

5) $A - A = \emptyset$

6) $A - \emptyset = A$

7) Proprietà commutativa: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

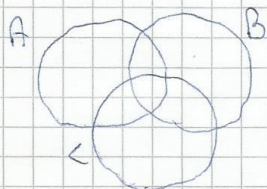
8) Proprietà associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

9) Proprietà distributiva:
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Vediamo ora gli esercizi:

1) Dimostrare che $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

1) Graficamente si ha:



sia $x \in (A \cup B) \cup C$ ne segue che:

$$x \in (A \cup B) \text{ o } x \in C$$

Quindi $x \in A$ o $x \in B$ o $x \in C$.

Ma se $x \in A$ allora $x \in A \cup (B \cup C)$, se se $x \in B$ o $x \in C$ allora $x \in B \cup C$ e quindi $x \in A \cup (B \cup C)$ e quindi:

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$$

2) Dimostrare che: $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2) Sia $x \in \overline{(A \cap B)}$, vuol dire che $x \notin A \cap B$ ossia $x \notin A$ e $x \notin B$. Ma quindi $x \in \bar{A}$ e $x \in \bar{B}$ ossia:

$$x \in \bar{A} \cup \bar{B} \text{ e quindi: } \overline{(A \cap B)} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$$

Viceversa, se $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ allora $x \in \bar{A}$ e $x \in \bar{B}$ e quindi $x \notin A$ e $x \notin B$. Allora:

$$x \notin A \cap B \text{ e } x \in \overline{(A \cap B)}. \text{ Ne segue che: } \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}$$

le due relazioni seguenti:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{e} \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ramma solo il nome di **Leggi di De Morgan**.

3) Per la prima tabulare l'insieme composto da tutti i numeri naturali compresi tra 1 e 10.

$$A = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq x \leq 10\}$$

In quest'ultimo esercizio abbiamo accumulato più numeri naturali. Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, ossia l'insieme dei numeri che soddisfano i seguenti assiomi di Peano:

- 1) $1 \in \mathbb{N}$
- 2) Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste una e un solo $m^* \in \mathbb{N}$ chiamato **successore** di m .
- 3) Per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m^* \neq 1$
- 4) Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m^* = n^*$ allora $m = n$
- 5) Per ogni sottoinsieme K di $\mathbb{N}$ con:

- a) $1 \in K$
- b) se $d \in K$ allora $d^* \in K$

coincide con $\mathbb{N}$.

Immediato che è un assioma. Un **assioma** è un concetto primitivo e un qualcosa che non siamo in grado di spiegare usando qualcosa di più basilare, ma che riteniamo valido. Ovviamente negli assiomi di Peano si ha:

$$m^* = m + 1$$

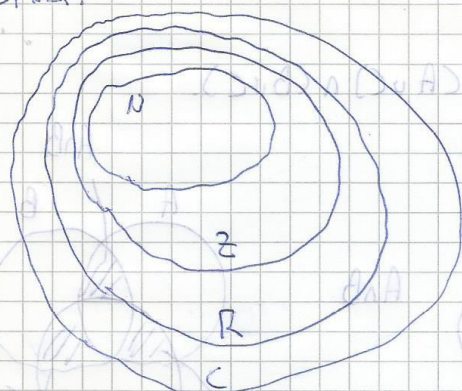
Per esempio, il numero naturale q , secondo l'otto assioma di Peano, non è il successore di nessun numero naturale. Il numero q è un numero naturale.

Indichiamo con:

$\mathbb{N}$ = insieme numeri naturali e $\mathbb{R}$ = insieme numeri reali

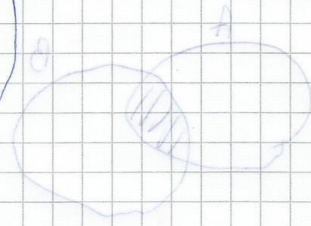
$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi e $\mathbb{C}$ = insieme numeri complessi.

Graficamente si ha:



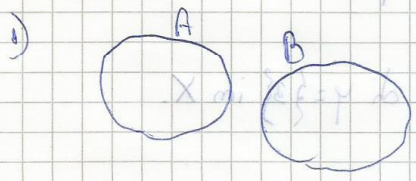
solo spaziosi (c

solo insedi 12 (c

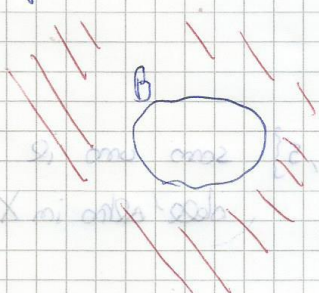


L'insieme dei numeri naturali va da zero a $+\infty$. L'insieme dei numeri interi va da $-\infty$ a $+\infty$ e contiene solo "numeri interi". I numeri reali sono numeri positivi e negativi. Valiamo qualche esempio/esercizio.

1) Siano A e B due sottoinsiemi di X. Verificare che $A \cap B' = A$ solo se $A \cap B = \emptyset$.



B' è il complementare di B.



Una parte di B' comprende anche tutto A. Quindi:

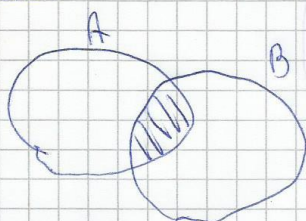
$$A \subset B' \Rightarrow A \cap B' = A$$

Se $A \cap B \neq \emptyset$ (non disgiunti) $\Rightarrow A \not\subset B' \Rightarrow A \cap B' \neq A$

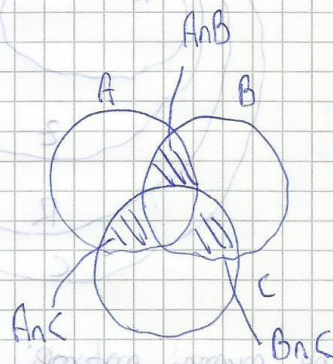
2) Dimostrare che:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

3) Si osserva che:



$A \cap B$



Siccome:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{proprietà distributiva})$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (\text{proprietà commutativa}).$$

3) Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ insieme complementare di $Y = \{3\}$ in X .

3) Si ha:

$$X \setminus Y = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Si noti che:

$B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{4, 5\}$ sono uno il complementare dell'altro in X .

Nella prossima lezione inizieremo a parlare più propriamente di geometria.