Consideriamo ora la seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamoci il determinante di tale matrice:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 6$$

Vediamo quanto vale la traccia di A:

$$Tr(A) = 1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow \det(A) = Tr(A)$$

Questo implica che, per una matrice diagonale, la traccia coincide con il suo determinante. Vediamo brevemente alcune proprietà dei determinanti facilmente dimostrabili:

- due matrici quadrate trasposte hanno lo stesso determinante.
- Se in una matrice due righe o due colonne sono uguali, il det è nullo.
- Il determinante di una matrice identità (identica) è uguale a 1.
- Una matrice il cui determinante è zero si dice singolare.

Vediamo un esempio di matrice singolare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Abbiamo già visto alcune proprietà delle matrici trasposte e delle matrici inverse. In particolare, per una matrice inversa si ha:

- $(A^{-1})^{-1} = A$

- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1}) = I$

Una matrice viene detta matrice ortogonale una matrice quadrata invertibile. L'importanza delle matrici ortogonali è grande soprattutto nell'algebra lineare in quanto geometricamente individuano delle isometrie. Tali matrici godono delle seguenti proprietà:

$$A^T = A^{-1}$$

La matrice A è ortogonale quando:

$$A^T A = A A^T = I$$

Se A è ortogonale, anche la sua trasposta è ortogonale. Quindi:

- $\det(AA^T) = \det(I)$
- $\det(A)\det(A^T) = 1$
- $\det(A)\det(A) = 1$

Precedentemente si è accennato al concetto di isometria. Una isometria è una trasformazione nel piano o nello spazio che mantiene inalterate le dimensioni (angoli, distanze, aree, volumi, ...). Un esempio di isometria è la traslazione o la rotazione.

Consideriamo ora una matrice A quadrata e simmetrica. Si chiamano **autovalori** ogni soluzione λ della seguente equazione:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Quindi:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda_n \end{vmatrix} = 0$$

Si tratta di una equazione di grado "n" che ammette "n" soluzioni reali, o complesse.

Si chiama **autovettore** $\vec{a}$ associato a λ ogni vettore colonna tale che:

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{a}\vec{a}' = I \quad \text{oppure} \quad \vec{a}' A \vec{a} = I$$

Vediamo un esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

A è quadrata e non simmetrica in quanto:

$$A \neq A^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Costruiamo $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

- NB: Autovalori e autovettori si possono calcolare sia per le matrici simmetriche che non simmetriche.

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Ora:

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right\} \text{autovalori.}$$

Troviamo gli autovettori.

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ -3 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

L'equazione dell'autospazio vale:

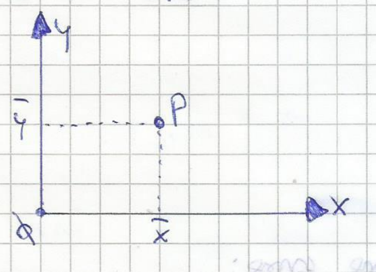
$$(A - 4I)x = \phi \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \end{bmatrix}$$

Per $\lambda = 4$ l'autovettore è:

$$\begin{bmatrix} x \\ -3x \end{bmatrix} \qquad -3x - y = \phi \Rightarrow -3x = y$$

Per autospazio si intende un sottospazio vettoriale di autovettori associati a ciascuno degli autovalori.

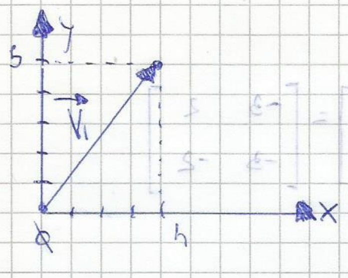
Vediamo ora di capire il significato e l'utilità della matrice. Consideriamo un punto su un piano cartesiano:



Il punto P generico sul piano è individuato in modo univoco da una coppia di coordinate dette, per l'appunto coordinate cartesiane.

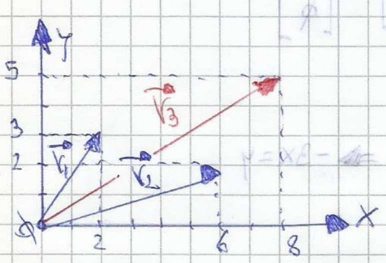
$$P(\bar{x}, \bar{y})$$

Quindi si potrebbero organizzare tali coordinate in una sorta di tabella di natura vettoriale:



$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

L'addizione tra due vettori può essere vista in questo modo:

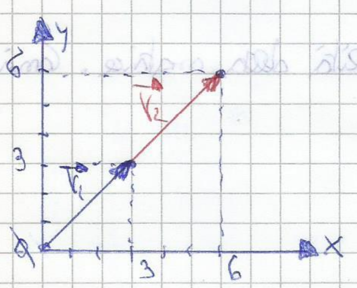


$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{V_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \vec{V_3}$$

Analogamente il prodotto di un vettore per uno scalare.



$$k \in \mathbb{R} = 2 \Rightarrow k\vec{V_1} = \vec{V_2} = k \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Se ho una matrice del seguente tipo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

la si può interpretare come:

$$A = \begin{bmatrix} x_{P_1} & x_{P_2} \\ x_{P_2} & y_{P_2} \\ x_{P_3} & y_{P_3} \end{bmatrix}$$

#righe = coordinate (x, y, z)
#colonne = # punti

Si consideri la seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vuole invertire la matrice. Per prima cosa ne calcoliamo il determinante.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Siccome il $\det A \neq 0$ allora A è invertibile. Calcoliamo i complementi algebrici di A:

$$(-1)^{1+1} \det A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(-1)^{1+2} \det A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(-1)^{1+3} \det A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

$$(-1)^{2+1} \det A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(-1)^{2+2} \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(-1)^{2+3} \det A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

elementi matrice inversa

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A}$$

$$(-1)^{3+1} \det A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +2$$

$$(-1)^{3+2} \det A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$(-1)^{3+3} \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Possiamo scrivere:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \emptyset \end{bmatrix}$$

Un sistema lineare di "m" equazioni in "n" incognite assume la seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

I coefficienti a_{ij} vengono detti coefficienti del sistema, $b_1 \dots b_m$ sono i termini noti. Se i termini noti sono tutti nulli, il sistema lineare si dice omogeneo. In forma matriciale si ha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \Rightarrow Ax - B = \emptyset$$

oppure:

$$\underline{Ax = B}$$

Nel caso in cui $m = n$ e $\det A \neq \emptyset$ il sistema ha una e una sola soluzione. Per trovare la soluzione del sistema o si usa il metodo della matrice inversa:

$$Ax = B \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{X = A^{-1}B}$$

oppure si può usare il metodo di Cramer:

$$X_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad X_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \quad \dots$$