Data la seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11}, a_{22}, a_{33} sono detti elementi diagonali della matrice.
La loro somma viene detta traccia della matrice:

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Si definisce matrice zero una matrice composta da tutti elementi nulli. Tornando brevemente al prodotto tra matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

A e B si dicono conformi per la moltiplicazione quando il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. Quindi:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

prodotto righe per colonne

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

(14)

Consideriamo un generico numero complesso z scritto nella seguente forma algebrica:

$$z = a \pm ib$$

Il coniugato di tale numero complesso è:

$$\bar{z} = a \mp ib$$

Quindi:

$$z = a + ib = 3 + i2 \quad \text{con } a = 3 \text{ e } b = 2 \Rightarrow \bar{z} = a - ib = 3 - 2i$$

Una matrice coniugata è tale se ogni suo elemento è il coniugato dell'elemento originale. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2+4i \\ 3 & 2i \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & 2-4i \\ 3 & -2i \end{bmatrix}$$

Vediamo qualche esempio:

1) Dimostrare che: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1) Innanzitutto: $(AB)^{-1} \cdot (AB) = (AB)(AB)^{-1} = I$

$$\Downarrow$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

Però:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$\Downarrow$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Quindi:

$$(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$$

2) Vedere se tale matrice è idempotente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}$$

2) La condizione di idempotenza è: $A^2 = I$. Quindi:

$$A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix} = I$$

La matrice di potenza A è idempotente.

3) Sommare le seguenti due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Si ha:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & \phi \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

4) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4) $\det(A) = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1 \Rightarrow \det(A) < \phi$.

5) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

5) La matrice in questione è rettangolare e pertanto non è possibile calcolarne il determinante.

Ricordiamo alcune proprietà di base sul determinante:

1) $\det(kA) \neq k \det(A)$
2) $\det(k_1 A_1 + k_2 A_2) \neq \det(k_1 A_1) + \det(k_2 A_2)$
3) $\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$
4) $\det(A) = \det(A^T)$

Una matrice con determinante nullo si dice matrice singolare. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1\cdot(2\cdot3-3\cdot2)-2(1\cdot3-3\cdot1)+3(2\cdot1-2\cdot1)$$

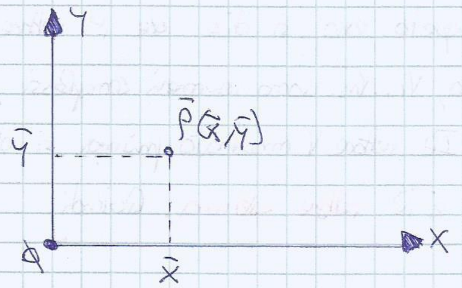
$$= 1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0 \rightarrow \text{MATRICE SINGOLARE}$$

Vediamo un altro esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 3\cdot 0 - 2\cdot 1 = -2$$

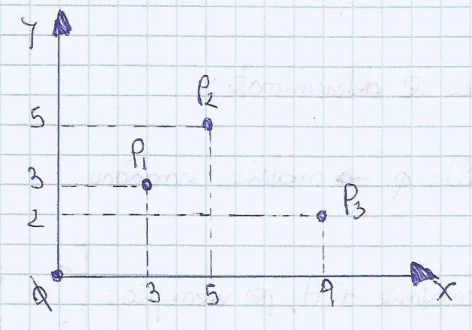
$$\det(A^T) = -2$$

Vediamo ora di capire il significato e l'utilità di una matrice. Consideriamo un punto su un piano cartesiano:



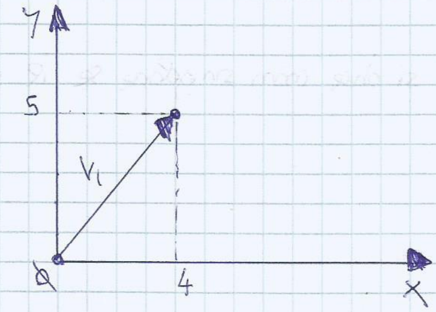
Un punto P generico su un piano è individuato in modo univoco da una coppia di coordinate cartesiane $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$.

Quindi si potrebbe organizzare tali coordinate in una sorta di tabella detta appunto matrice. Per esempio:



	X	Y
P_1	3	3
P_2	5	5
P_3	9	9

La matrice potrebbe però anche avere una interpretazione di "natura vettoriale":



$V_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ = vettore posizione

Si consideri il seguente vettore:

$$V = [V_1, V_2, \dots, V_m]$$

dove $V_1, V_2, \dots, V_m$ sono numeri reali. In questo caso si dice che il vettore V è un vettore nel campo reale R. Se, per esempio, $V_1 \dots V_m$ sono numeri complessi, allora il vettore V opera nel campo complesso C. Il vettore V mostrato prima si dice anche vettore riga. Il trasposto del vettore riga è il vettore colonna. Quindi:

$$V = [1 \;\; 2 \;\; 3] \;, \quad V^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Data una generica matrice A che sia quadrata o rettangolare, si dice rango di una matrice l'ordine massimo del suo minore diverso da zero. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$. Calcoliamoci il determinante:

$$\det(A) = \emptyset \rightarrow \text{matrice singolare.}$$

Se però prendiamo una qualunque sottomatrice di A, per esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\det = -1$

Quindi il rango di A è:

$$\underline{R(A) = 2}$$

Una matrice A quadrata di ordine "n" si dice non singolare se il suo rango vale:

$$\underline{R(A) = n.}$$

Una matrice nulla ha rango $\emptyset$.