CORSO DI GEOMETRIA:

Iniziamo il corso di Geometria definendo il concetto di matrice. Una matrice è un aggregato ordinato di numeri. Una matrice si può anche definire come una tabella di numeri. La dimensione di una matrice è data dal suo numero di righe e di colonne. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ A è una matrice con 3 colonne e 2 righe.

In generale si può scrivere: $A(m \times n)$ per indicare il fatto che la matrice A è composta da "m" righe ed "n" colonne. Quando una matrice ha il numero di righe diverso dal numero di colonne la matrice si dice rettangolare mentre quando la matrice ha il numero di righe uguale al numero di colonne allora la matrice si dice quadrata.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$ A è una matrice quadrata

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ B è una matrice rettangolare

Due matrici si dicono coincidenti quando hanno le stesse dimensioni e gli stessi numeri nelle medesime posizioni. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ $A \neq B \Rightarrow$ A e B non sono identiche

②

Un altro esempio:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$ A e B non sono identiche.

Un altro esempio:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$ $A=B$ ossia A e B sono identiche in quanto:

$$a_{ij}=b_{ij}$$

dove:

a_{ij} = l'elemento generico della matrice A di riga "i" e colonna "j".

b_{ij} =

Anche con le matrici si possono fare le usuali operazioni. Si considerino due matrici A e B tali che:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\ 5 & 6 & 6\end{bmatrix}$$

La matrice somma $C=A+B$ è:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\ 5 & 6 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 7\\ 9 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

Generalizzando si può scrivere:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

La somma tra matrici gode delle seguenti proprietà:

1) proprietà commutativa $\Rightarrow$ $A+B=B+A$
2) proprietà associativa $\Rightarrow$ $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) elemento neutro $\Rightarrow$ 0 è la matrice nulla ossia la matrice con tutti elementi nulli.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + O = O + A = A \quad \text{dove } O = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & \phi \end{bmatrix}$$

4) elemento opposto $\Rightarrow$ $-A$ tale che: $A + (-A) = O$ con $-A$ avente tutti gli elementi $-a_{ij}$.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi & \phi \end{bmatrix} = O$$

NB: Per poter effettuare la somma tra due matrici, è indispensabile che le stesse abbiano la medesima dimensione.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{non si può fare } A+B.$$

Un'altra operazione che si può fare con le matrici è il prodotto di uno scalare per una matrice. Per esempio:

$$\alpha \text{ uno scalare}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{Quindi se } \alpha = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda il prodotto di uno scalare per una matrice valgono queste proprietà:

1) proprietà distributiva $\Rightarrow$ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2) elemento neutro $\Rightarrow$ $1 \cdot A = A$

Sia A una generica matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Gli elementi della matrice tale per cui: $i=j$ (esempio: $a_{11}, a_{22}, \ldots$) vengono detti elementi diagonali

Si chiama matrice identità quella matrice quadrata con tutti gli elementi diagonali uguali a 1. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NB: Tutti gli altri elementi devono essere 0.

Quindi:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Un'altra operazione fondamentale è il prodotto tra matrici. Siano A e B due generiche matrici esse si dicono conformabili righe per colonne quando il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda. Se due matrici sono conformabili allora si può fare la loro moltiplicazione. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

A e B sono conformabili.

Quindi:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 17 & 20 \\ 23 & 30 & 37 & 44 \\ 35 & 46 & 57 & 68 \end{bmatrix}$$

Generalizzando il prodotto matriciale avviene in questa maniera:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{con } i=1\dots m,\ j=1\dots m$$

Di seguito alcune proprietà godute dal prodotto matriciale:

1) $A(B+C) = AB + AC$ → prima proprietà distributiva
2) $(A+B)\cdot C = AC + BC$ → seconda proprietà distributiva.
3) $A(BC) = (AB)C$ → proprietà associativa

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Una matrice quadrata i cui elementi a_{ij} sono nulli quando $i>j$ viene detta matrice triangolare alta.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Analogamente, una matrice con elementi nulli per $i<j$ viene detta matrice triangolare bassa.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

⑥

Una matrice tale per cui:

$$\underline{A = A^2}$$ viene detta matrice idempotente

Una matrice tale per cui:

$$\underline{A^n = 0}$$ viene detta matrice nilpotente.

Si supponga ora di avere a disposizione due matrici A e B tali che:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

In questo caso, B viene detta matrice inversa di A. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

B è la matrice inversa di A.

Una matrice tale per cui:

$$\underline{A^2 = I}$$ si dice matrice involutoria.

Sia A una generica matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ A è una matrice di ordine $(m \times n)$, con $m = 2$ e $n = 3$. Quindi: $A(2 \times 3)$

Scambiando le righe e le colonne della matrice A si ottiene una nuova matrice A^T di ordine $(n \times m)$ che si chiama matrice trasposta.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (3 \times 2)$$

Si noti che:

$$(A^T)^T = A$$
$$\underline{(kA)^T = kA^T}$$

Inoltre:

$$\underline{(A+B)^T = A^T + B^T}$$
$$\underline{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

NB: Una matrice dove:

$$\underline{A^T = A}$$

si dice matrice simmetrica

Invece, se si ha la seguente condizione:

$\underline{A^T = -A}$, la matrice A si dice emisimmetrica

Vediamo qualche esempio:

1) Sia A una matrice nilpotente di ordine 2. Dimostrare che vale la seguente relazione:

$$A(I \pm A)^n = A$$

1) Una matrice nilpotente di ordine 2 è tale perché:

$$A^2 = \phi \Rightarrow A^3 = A^4 = \dots = A^n = \phi$$

Quindi:

$$A(I \pm A)^n = A(I \pm A) = A$$

2) Dimostrare che $(I - A)(I + A) = \phi$ e quindi A è involutoria.

2) Una matrice è involutoria quando $A^2 = I$. Siccome:

$$(I-A)(I+A) = I^2 + \cancel{IA} - \cancel{IA} - A^2 \Rightarrow A^2 = I$$

Quindi A è una matrice involutoria.

Una operazione fondamentale nell'algebra matriciale è il determinante di una matrice. Tale operazione può essere fatta soltanto sulle matrici quadrate. Essa si indica con $\det(A)$ oppure $|A|$. Il determinante di una matrice A è per definizione:

$$|A| = \sum \epsilon_{j_1 \dots j_n} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

dove:

$j_1, j_2 \dots j_n$ è una data permutazione.

Un esempio di permutazione:

$$3! = 6 \Rightarrow 123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

Per esempio si supponga che:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = (2 \cdot 3) - (2 \cdot 1) = 6 - 2 = 4.$$

Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Sia A una matrice e A^T la sua trasposta, allora si ha: $\det(A) = \det(A^T)$.