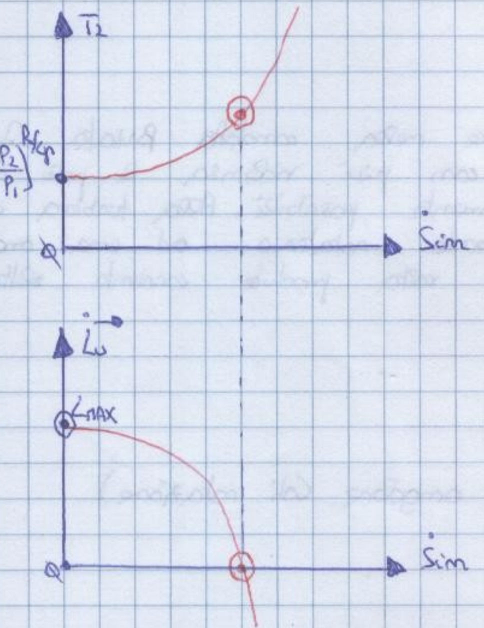
Si noti che una turbina in generale non interagisce con l'ambiente attraverso scambi di calore, ma solo attraverso scambi di lavoro. Se la turbina è a gas, ed il gas in questione è un gas perfetto, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \vec{\dot{L}}_u = \dot{m}_1 c_p (T_1 - T_2) \\ \dot{m}_1 \left(c_p \ln T_2/T_1 - R \ln p_2/p_1\right) + \dot{S}_{in} = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che $\dot{S}_{in} = 0$. Abbiamo:

$$c_p \ln T_2/T_1 = R \ln p_2/p_1 \Rightarrow \underline{T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p}}$$

Al crescere dell'irreversibilità poi aumenta la temperatura di uscita T_2 e diminuisce esponenzialmente la potenza meccanica erogata $\vec{\dot{L}}_u$.



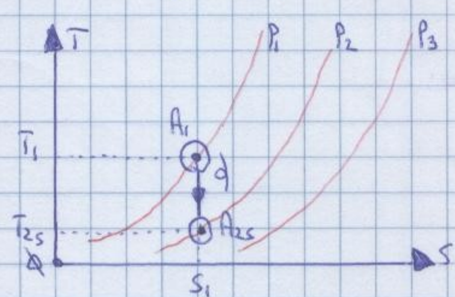
Infatti:

$$\dot{S}_{in} = \left(\dot{m}_1 R \ln p_2/p_1 + \dot{m}_1 c_p \ln T_2/T_1\right)$$

Aumentando T_2 aumenta la differenza e quindi $\dot{S}_{in}$.

Si noti che il lavoro massimo si ha in condizioni di reversibilità ($\dot{S}_{in} = 0$)

Per valutare l'efficienza di una turbina, analizziamo il piano (T, s):



Le curve qui affianco disegnate sono delle isobare. Indichiamo con d il punto iniziale.

NB: ↓ è un processo isoentropico (reversibile)

I punti per noi accessibili sono quelli che hanno entropia maggiore di S_1. Siccome i processi in questione sono reversibili (linee continue sul grafico) abbiamo:

$$\underline{\vec{L}_{MAX} = T_1 - T_{2s}}$$

Perciò più la turbina incrementa la temperatura del fluido e più diventa irreversibile. Definiamo rendimento isoentropico della turbina la seguente espressione:

$$\underline{\eta_T = \frac{\vec{\dot{L}}_u}{\vec{\dot{L}}_{MAX}}}$$

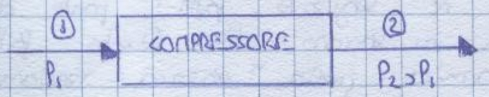
Possiamo riscrivere anche il tutto in questa maniera:

$$\eta_T = \frac{\dot m(h_1-h_2)}{\dot m(h_1-h_{2s})} = \frac{(h_1-h_2)}{(h_1-h_{2s})}$$

Se il fluido in questione è un gas perfetto abbiamo:

$$\eta_T = \frac{c_p(T_1-T_2)}{c_p(T_1-T_{2s})} = \frac{T_1-T_2}{T_1-T_{2s}}$$

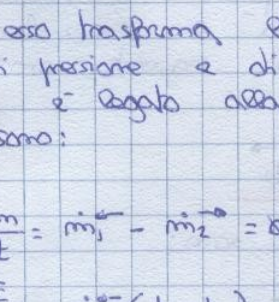
Detto ciò parliamo ora di un'altra macchina che riveste un ruolo assai importante. Parliamo del compressore. Un compressore innanzitutto è una macchina operatrice ($\dot L_i^{\leftarrow}$) che prema il flusso e lo fa aumentare di pressione. Quindi si ha:



In sostanza esso trasforma l'energia meccanica proveniente per esempio da un motore in energia di pressione e di velocità del fluido operante. Ecco perché molto spesso il compressore è legato alla turbina attraverso l'albero motore. Le equazioni di un compressore sono:

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow} - \dot m_2^{\rightarrow} = 0 \\ \dfrac{dE}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow}(h_1-h_2) - \dot L_u^{\rightarrow} = 0 \\ dS/dt = \dot m_1^{\leftarrow}(s_1-s_2) + \dot S_{in} = 0 \end{cases} \quad \text{(STATI STAZIONARI).}$$

Si noti che sia il compressore sia la turbina operano stazionariamente. Si ricordi poi che uno stato stazionario non necessariamente è uno stato di equilibrio stabile. La maggior parte dei compressori presenti in commercio sono di tipo assiale. Prendiamo ora in considerazione ora la seguente macchina detta macchina motrice termica ciclica:



Questa macchina produce lavoro meccanico a spese di calore. Supponiamo che:

$$\dot Q_1^{\leftarrow} > \dot Q_2^{\rightarrow}$$

In questo contesto abbiamo che $\dot m = \dot V = 0$. Inoltre la macchina motrice termica lavora in stato stazionario (regime). I bilanci di energia ed entropia sono:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \dot Q_1^{\leftarrow} + \dot Q_2^{\rightarrow} - \dot L_u^{\rightarrow} = 0 \\ \dfrac{dS}{dt} = \dot S_{Q_1}^{\leftarrow} + \dot S_{Q_2}^{\leftarrow} + \dot S_{in} = 0 \end{cases}$$

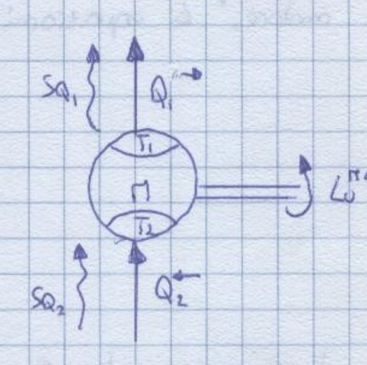
Supposto che T_1 e T_2 siano costanti si ha:

$$\begin{cases} \dot{S}_{Q_1}^{\leftarrow} = \dfrac{\dot{Q}_1^{\leftarrow}}{T_1} \\ \dot{S}_{Q_2}^{\leftarrow} = \dfrac{\dot{Q}_2^{\leftarrow}}{T_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\dot{Q}_1^{\leftarrow}}{T_1} + \dfrac{\dot{Q}_2^{\leftarrow}}{T_2} + \dot{S}_{irr} = 0 \\ \dot{L}_u^{\rightarrow} = \dot{Q}_1^{\leftarrow} + \dot{Q}_2^{\leftarrow} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_2^{\leftarrow} = -T_2 \left(\dfrac{\dot{Q}_1^{\leftarrow}}{T_1} \right) - T_2 \dot{S}_{irr} \\ \dot{L}_u^{\rightarrow} = \left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right) \dot{Q}_1^{\leftarrow} - T_2 \dot{S}_{irr} \end{cases}$$

Da quest'ultima equazione possiamo notare il seguente fatto: parte del calore entrante ($Q_1^{\leftarrow}$) esce ($Q_2^{\rightarrow}$), e parte viene trasformata in lavoro utile. Questo fatto è in accordo con il secondo principio della termodinamica nella "classica versione" il quale afferma che non tutto il calore disponibile può trasformarsi in lavoro, ma una parte di esso dovrà essere "degradata". Si ricordi inoltre che poiché la macchina lavora in stato stazionario, non deve accumularsi entropia in essa. Analogamente definiamo la macchina operatrice termica ciclica nel seguente modo:



Qui abbiamo: $\dot{Q}_1^{\rightarrow} > \dot{Q}_2$

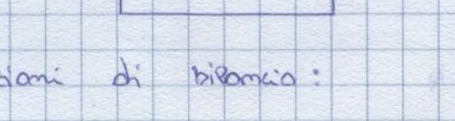
le equazioni di bilancio sono:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \left(-\dot{Q}_1^{\rightarrow} + \dot{Q}_2^{\leftarrow} + \dot{L}_u^{in\leftarrow} \right) = 0 \\ \dfrac{dS}{dt} = \left(-\dot{S}_{Q_1}^{\rightarrow} + \dot{S}_{Q_2}^{\leftarrow} + \dot{S}_{irr} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_1^{\rightarrow} = (\dot{Q}_2^{\leftarrow} + \dot{L}_u^{\leftarrow}) \\ \dot{S}_{Q_1}^{\rightarrow} = (\dot{S}_{Q_2}^{\leftarrow} + \dot{S}_{irr}) \end{cases}$$

Quindi il lavoro d'albero e il calore entranti vengono entrambi scaricati con $\dot{Q}_1^{\rightarrow}$. L'entropia associata a Q_1 serve a scaricare l'entropia associata a Q_2, e l'eventuale entropia di irreversibilità. Esempi di macchine operatrici sono la pompa di calore e il frigorifero. Questi ultimi hanno bisogno di lavoro compiuto dall'esterno per poter funzionare. In particolare la pompa di calore ha lo scopo di riscaldare. Essa ha come livello termico fondamentale l'ambiente. Il frigorifero invece ha lo scopo di mantenere ad una certa temperatura $T \le T_a$ un dato corpo. Noi indicheremo sempre con T_a la temperatura dell'ambiente. Si ricordi infine che l'ambiente è un serbatoio termico. Vediamo ora qualche esempio di quanto visto. Consideriamo un compressore che comprima adiabaticamente una portata d'aria $\dot{m}_i^{\leftarrow} = 54\ kg/h$. La pressione e la temperatura dell'aria all'ingresso del compressore sono rispettivamente $P_1 = 1 bar$ e $T_1 = 20°C$. All'uscita del compressore $P_2 = 5 bar$. Nelle ipotesi che il compressore operi stazionariamente, che abbia un rendimento isoentropico $\eta_c = L_{ver}/L = 0{,}9$ e che l'aria si comporti come un gas perfetto, determinare T_2 e $\dot{L}^{\rightarrow}$.



Scriviamo le equazioni di bilancio:

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow} - \dot m_2^{\rightarrow} = 0 \\ \dfrac{dE}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow}(h_1-h_2) + \dot Q^{\leftarrow} + \dot L^{\rightarrow} = 0 \\ \dfrac{dS}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow}(s_1-s_2) + \dot S^{\leftarrow} + \dot S_{irr} = 0 \end{cases}$$ (STATI STAZIONARI)

Poiché il compressore opera adiabaticamente si ha: $\underline{\dot Q^{\leftarrow} = \dot S^{\leftarrow} = 0}$

$$\begin{cases} \dot L^{\rightarrow} = +\dot m_1^{\leftarrow}(h_1-h_2) \\ \dot S_{irr} = \dot m_1^{\leftarrow}(s_2-s_1) \end{cases}$$

L'aria è un gas perfetto biatomico e quindi:

$$\begin{cases} c_v = 5/2\, R \\ c_p = 7/2\, R \end{cases}$$ ed inoltre $M = 29\, kg/kmole$.

Quindi:
$$\begin{cases} h_2-h_1 = c_p(T_2-T_1) \\ s_2-s_1 = m(c_p \ln T_2/T_1 - R\ln p_2/p_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot L^{\rightarrow} = -\dot m_1^{\leftarrow} c_p(T_2-T_1) \\ \dot S_{irr} = \dot m_1^{\leftarrow}(c_p^* \ln T_2/T_1 - R^* \ln p_2/p_1) \end{cases}$$

Siccome in generale per il compressore, il rendimento isoentropico vale:

$$\underline{\eta_c = \frac{\dot L_{rev}}{\dot L^{\rightarrow}}}$$

NB: $\dot m^{\leftarrow} = \dfrac{50\, kg}{3600\, s}$

si ottiene: $\dot L^{\rightarrow} = \dfrac{\dot L_{rev}}{\eta_c}$ con $\dot L_{rev} = \dot m_1^{\leftarrow} c_p T_1 \left(1-\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p}\right)$

Infatti il lavoro reversibile si ha quando $\dot S_{irr} = 0 \Rightarrow c_p \ln T_2/T_1 = R \ln p_2/p_1$
$\Downarrow$
$T_2 = T_1\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p}$

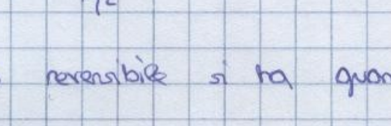
Pertanto:

$$\dot L^{\rightarrow} = \frac{1}{\eta_c}\, \dot m_1^{\leftarrow} c_p T_1 \left(1-\left(p_2/p_1\right)^{R/c_p}\right) = \ldots = -2{,}65\, kW$$

Quindi: $\dot L^{\leftarrow} = 2{,}65\, kW$. A questo punto il calcolo di T_2 diventa banale:

$$T_2 = T_1 + \frac{(-\dot L^{\rightarrow})}{\dot m_1^{\leftarrow} c_p} = \ldots = 210\ °C.$$

Vediamo ora il caso di una turbina che espande adiabaticamente una portata d'aria $\dot m_1^{\leftarrow} = 1000\, kg/h$. La pressione e la temperatura dell'aria all'ingresso della turbina sono rispettivamente $p_1 = 4\, bar$ e $T_1 = 900\,°C$. All'uscita dalla turbina l'aria ha una pressione $p_2 = 1\, bar$. Nelle ipotesi che la turbina operi stazionariamente, che abbia un rendimento isoentropico $\eta_T = L/L_{rev} = 0{,}85$ e che l'aria si comporti come un gas perfetto, determinare T_2 e $\dot L^{\rightarrow}$. Abbiamo:



Scriviamo le equazioni di bilancio:

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow} - \dot m_2^{\rightarrow} = 0 \\ \dfrac{dE}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow}(h_1-h_2) - \dot L^{\rightarrow} = 0 \\ \dfrac{dS}{dt} = \dot m_1^{\leftarrow}(S_1-S_2) + \dot S_{irr} = 0 \end{cases}$$ (STATI STAZIONARI)

72

Quindi: $\begin{cases} \dot{L}^{\rightarrow} = \dot{m}_1^{\rightarrow}(h_1 - h_2) \\ \dot{S}_{irr} = \dot{m}_1^{\rightarrow}(s_2 - s_1) \end{cases}$ L'aria però è un gas perfetto biatomico e quindi: $\begin{cases} c_p = 7/2\,R \\ c_v = 5/2\,R \end{cases}$

Pertanto:
$$\begin{cases} \dot{L}^{\rightarrow} = \dot{m}_1^{\rightarrow}(c_p(T_1 - T_2)) \\ \dot{S}_{irr} = \dot{m}_1^{\rightarrow}(c_p^* \ln T_2/T_1 - R^* \ln p_2/p_1) \end{cases} \quad \text{con } s_2 - s_1 = m(c_p \ln T_2/T_1 - R \ln p_2/p_1)$$

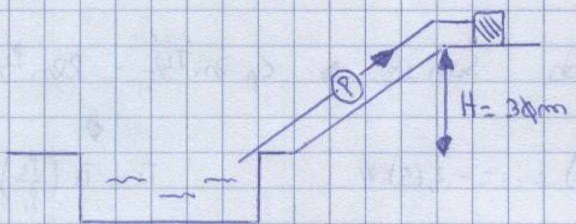
Ma: $\eta_T = \frac{\dot{L}^{\rightarrow}}{\dot{L}^{\rightarrow}_{rev}} \Rightarrow \dot{L}_{rev} = \frac{\dot{L}^{\rightarrow}}{\eta_T}$. Ma $\dot{L}_{rev}$ si ottiene quando la macchina lavora reversibilmente. Quindi:

$$\dot{S}_{irr} = 0 \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p} =$$

Pertanto $\dot{L}^{\rightarrow}_{rev} = \dot{m}_1^{\rightarrow} c_p^*\left(T_1 - T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p}\right) =$

Quindi:
$$\dot{L}^{\rightarrow} = \eta_T \dot{L}^{\rightarrow}_{rev} = 0{,}85 \cdot$$

Vediamo ora un ultimo esempio. Vogliamo calcolare la potenza che assorbe una pompa per portare acqua ad un complesso industriale posizionato ad una quota di 30 m sopra il livello del bacino di prelievo e con una condotta di diametro $d = 10$ cm e lunghezza $L = 60$ m. Si supponga una richiesta di approvvigionamento pari a 50 m^3/h e si analizzi il caso ideale (in cui le perdite di carico sono trascurabili). Graficamente si ha la seguente situazione:



In questo caso, essendoci di mezzo la quota, dobbiamo considerare anche l'energia potenziale e quindi abbiamo di fronte una sorta di entalpia generalizzata senza però il fattore legato all'energia cinetica. Abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \dot{m}_1^{\rightarrow}((h_1 - h_2) + g(z_1 - z_2)) - \dot{L}^{\rightarrow} = 0 \\ \frac{dS}{dt} = \dot{m}_1^{\rightarrow}(s_1 - s_2) = 0 \end{cases} \quad \text{(STATI STAZIONARI)}$$

Abbiamo supposto che non ci siano scambi di calore tra la pompa e l'ambiente e che la pompa operi stazionariamente. Quindi:

$$\begin{cases} \dot{m}_1^{\rightarrow}((h_1 - h_2) + g(z_1 - z_2)) = \dot{L}^{\rightarrow} \\ s_1 = s_2 \end{cases}$$

Il processo in questione è isentropico e pertanto:

$$s_2 - s_1 = \dot{m}_1 c \ln\frac{T_2}{T_1} = 0 \Rightarrow \underline{T_2 = T_1}$$

Infatti l'acqua è un liquido incomprimibile con densità ρ:

$$\rho = 10^3\ kg/m^3. \quad \text{(per } H_2O \text{ liquida).}$$

Pertanto: $h_2 - h_1 = c(T_2 - T_1) = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$ (processo isoentropico).

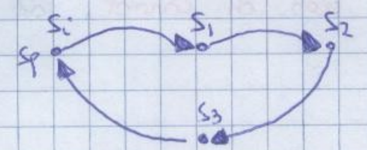
$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 30m \end{cases} \qquad \dot{m}\, g(z_1 - z_2) = +\dot{L}^{\leftarrow} = -4,1\, kW \Rightarrow \dot{L}^{\leftarrow} = +4,1\, kW. \quad \text{(POTENZA ASSORBITA)}$$

Si noti che:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 10^3\, kg/m^3 \cdot \dot{V} = 1000\, kg/m^3 \cdot 0,0138\, kg/s = 13,88\, kg/s.$$

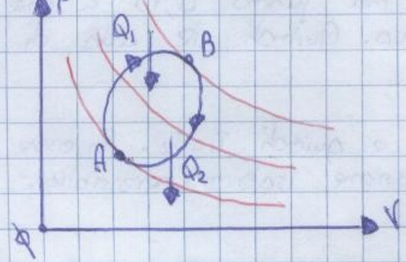
NB: $\dot{V} = 50\, m^3/h = \frac{50}{3600} \frac{m^3}{s}$;

Fino ad ora abbiamo parlato di molti processi tra cui i processi ciclici, ma non li abbiamo approfonditi. Definiamo ciclo termodinamico una serie di processi che, partendo da condizioni iniziali vi ritornano dopo un certo numero di trasformazioni. Graficamente si ha:



CICLO TERMODINAMICO.

Quindi quando un generico fluido subisce una serie di trasformazioni tali da riportarlo allo stato iniziale, queste trasformazioni sono rappresentate da una linea chiusa che viene detta CICLO TERMICO. Per realizzare un ciclo termico è necessario possedere un salto di temperatura. Vediamo di chiarire questo concetto. Rappresentiamo sul piano (P, V) un fascio di adiabatiche e quindi tagliamo un ciclo che presenta nei punti A e B la tangenza con le adiabatiche estreme:



Lungo la curva AB ci sarà un'introduzione di calore Q_1 nel fluido operante. Quindi tale fluido sarà a contatto con una sorgente termica.

Al contrario lungo la curva BA si avrà sottrazione di calore Q_2 dal fluido. Quindi quest'ultimo sarà a contatto con un refrigerante. Se il fluido percorre l'intero ciclo, alla fine si avrà:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q_1^{\leftarrow} - Q_2^{\rightarrow} = L^{\rightarrow}$$

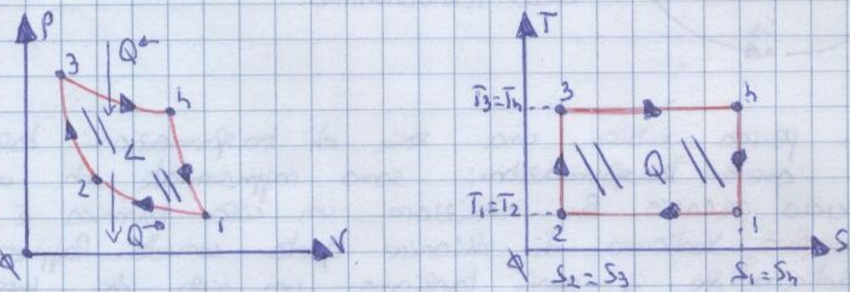
La differenza tra il calore assorbito e il calore ceduto verrà trasformata in lavoro. Per definizione, il rendimento di un ciclo termodinamico sarà dato da:

$$\eta = \frac{Q_1^{\leftarrow} - Q_2^{\rightarrow}}{Q_1^{\leftarrow}} = \frac{L^{\rightarrow}}{Q_1^{\leftarrow}}$$

Si noti che il rendimento di un ciclo è un numero compreso tra zero e 1. Quindi:

$$0 \le \eta \le 1$$

Si presti però attenzione alla seguente considerazione: se $\eta=1$ si ha che $Q_2^{\rightarrow}=Q$ e quindi tutto il calore assorbito viene trasformato in lavoro. Questo fatto è però in contrasto con il secondo principio della termodinamica nella sua "classica formulazione". Quindi non può esistere un ciclo con $\eta=1$. Abbiamo, in precedenza, parlato dei processi reversibili. Abbiamo detto che un tale processo può essere ripercorso all'indietro. Vediamo però di dire qualcosa di più su questi processi. Affinché una trasformazione sia reversibile è necessario che tra il fluido e le sorgenti termiche esista una differenza di temperatura infinitesima. Sono per esempio reversibili le trasformazioni adiabatiche e isoterme. Purtroppo in natura le trasformazioni non sono reversibili perché, oltre all'attrito, ci sono sempre trasmissioni di calore tra il fluido e l'ambiente esterno. Un ciclo formato da una serie di trasformazioni reversibili viene detto ciclo reversibile. Quindi per avere un ciclo reversibile è necessario che il fluido e i corpi con cui esso viene a contatto posseggano differenze infinitesime di pressione e temperatura. Purtroppo un ciclo di questo tipo si percorrerebbe in un tempo infinitamente lungo. Iniziamo ora a vedere i vari tipi di cicli. Iniziamo a parlare del ciclo di Carnot. Tale ciclo si rappresenta in questo modo:



Questo ciclo è composto da due trasformazioni isentropiche adiabatiche reversibili, e da due trasformazioni isoterme anch'esse reversibili. L'area nel piano (p,v) ci dice quanto lavoro viene prodotto ogni volta che il ciclo viene percorso. Quindi il ciclo di Carnot è un ciclo reversibile. In particolare:

1) $1\rightarrow2$ è una trasformazione isoterma reversibile e quindi $T_1=T_2$. Per essere più precisi la trasformazione in questione è una compressione isoterma reversibile. Siccome la trasformazione in questione è reversibile, si ha:

$$(S_2-S_1)=\frac{Q^{\rightarrow}}{T_2} \Rightarrow Q^{\rightarrow}=(S_2-S_1)T_2$$

2) $2\rightarrow3$ è una trasformazione isentropica adiabatica reversibile. Quindi si può scrivere:

$$(S_2-S_1)=0 \Rightarrow c_p \ln T_2/T_1 = R \ln p_2/p_1$$ se consideriamo come fluido un gas perfetto.

Quindi:
$$T_2/T_1=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p} \Rightarrow T_2=T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p}$$

3) $3\rightarrow4$ è una espansione isoterma reversibile. Quindi: $T_3=T_4$. Per questa trasformazione possiamo scrivere:

$$(S_4-S_3)=\frac{Q^{\leftarrow}}{T_3} \Rightarrow Q^{\leftarrow}=(S_4-S_3)T_3$$

4) $4 \rightarrow 1$ è una trasformazione isoentropica adiabatica. Quindi:

$$(S_1 - S_4) = 0 \Rightarrow c_p n \ln \frac{T_1}{T_4} = R n \ln \frac{P_1}{P_4}$$

$$\Downarrow$$

$$T_1 = T_4 \left(\frac{P_1}{P_4}\right)^{R/c_p}$$

Siccome per definizione il rendimento di un ciclo è il rapporto tra il lavoro e il calore assorbito, per il ciclo di Carnot abbiamo il seguente rendimento:

$$\eta = \frac{Q^{+} - Q^{-}}{Q^{+}} = \frac{(S_4 - S_3)T_3 - (S_2 - S_1)T_2}{(S_4 - S_3)T_3}$$

Possiamo scrivere il rendimento anche in questo modo:

$$\eta = 1 - \frac{Q^{-}}{Q^{+}} = 1 - \frac{(S_2 - S_1)T_2}{(S_4 - S_3)T_3} \quad \text{siccome} \begin{cases} S_2 = S_3 \\ S_1 = S_4 \end{cases} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_2}{T_3}$$

Quindi si ha:

$$\eta_c \stackrel{\Delta}{=} \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) = \left(1 - \frac{T_{MIN}}{T_{MAX}}\right)$$

Il ciclo di Carnot ha la caratteristica che è il ciclo reversibile di rendimento massimo. Quindi si dimostra che qualsiasi ciclo reversibile possiede un rendimento minore o al massimo uguale a quello di Carnot. Quindi:

$$\eta \leq \eta_c$$

Si noti inoltre che il ciclo di Carnot è un ciclo simmetrico. Per un ciclo simmetrico vale la seguente relazione:

$$P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4 \quad \text{e} \quad T_1 \cdot T_3 = T_2 = T_4$$

Quindi ricapitolando possiamo scrivere:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{MIN}}{T_{MAX}}$$

$\eta \leq \eta_c$ per ogni ciclo reversibile

$P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4$ e $T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_4$ per ogni ciclo simmetrico.

Ora vedremo nuovi tipi di cicli.