Si noti però che nella direzione di Ω, l'intensità e il potere emissivo non coincidono e quindi:

$$E_{\omega,\lambda} = I_{\omega,\lambda}\cos\vartheta = \frac{I_\lambda}{\pi}\cos\vartheta$$

$$E_\omega = I_\omega \cos\vartheta = \frac{I}{\pi}\cos\vartheta$$

Indichiamo con il termine radiosità (brillanza) che indichiamo con J, la potenza radiante che lascia una superficie. Essa è dovuta sia al potere emissivo dovuto alla superficie stessa, sia alla eventuale radiazione incidente sulla superficie, e da quella riflessa. Graficamente si ha:

Si noti che la radiosità totale è data da:

$$J = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\omega,\lambda\,(e+R)} \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\lambda$$

I pedici 'e' ed 'R' si riferiscono sostanzialmente all'intensità emessa e riflessa. Se la superficie emette e riflette in modo diffuso si ha:

$$J_\lambda = \pi I_{\omega,\lambda\,(e+R)}$$

$$J = \pi I_{\omega\,(e+R)}$$

Siccome lungo Ω l'intensità e il potere emissivo non coincidono, si ha:

$$J_{\omega,\lambda\,(e+R)} = I_{\omega,\lambda\,(e+R)}\cos\vartheta = \frac{I_{\lambda\,(e+R)}}{\pi}\cos\vartheta$$

$$J_{\omega\,(e+R)} = I_{\omega\,(e+R)}\cos\vartheta = \frac{I_{(e+R)}}{\pi}\cos\vartheta$$

Dicesi irradiazione la radiazione incidente su una superficie. Essa viene indicata con G. La quantità $G_{\omega,\lambda}$ è una quantità spettrale e direzionale ed è chiamata irradiazione monocromatica angolare e rappresenta la potenza radiante incidente nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda $d\lambda$, per unità di area reale dA, e per unità di angolo solido $d\omega$. Possiamo anche scrivere:

$$G = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\lambda,\vartheta,\varphi} \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\lambda$$

G è l'irradiazione emisferica integrale e rappresenta la potenza radiante incidente sulla superficie elementare dA proveniente da tutte le direzioni e di tutte le lunghezze d'onda. Se la radiazione incidente è diffusa possiamo come al solito scrivere:

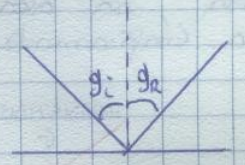
$$G_\lambda = \pi I_{\lambda,\omega}$$

$$G = \pi I_\omega$$

$$G_{\omega,\lambda} = I_{\omega,\lambda} \cos\vartheta = \frac{I_\lambda}{\pi} \cos\vartheta$$

$$G_\omega = I_\omega \cos\vartheta = \frac{I}{\pi} \cos\vartheta$$

NB:

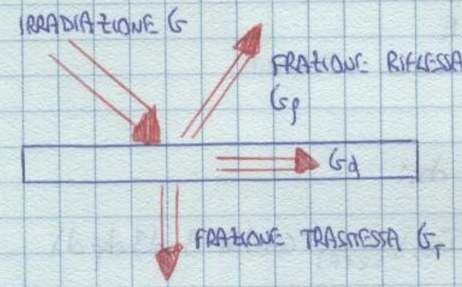


ϑ_i = angolo di incidenza

ϑ_R = angolo di riflessione

Si ha sempre $\vartheta_i = \vartheta_R$.

Consideriamo ora la seguente situazione:



G_d = FRAZIONE ASSORBITA.

Come si può notare la radiazione incidente, contenuta nell'intervallo unitario spettrale ed angolare, viene in parte assorbita, in parte riflessa, e in parte trasmessa; Quindi:

$$G_{\omega,\lambda} = G_{\omega,\lambda}(d) + G_{\omega,\lambda}(\rho) + G_{\omega,\lambda}(T)$$

Dividiamo ora entrambi i membri per $G_{\omega,\lambda}$ ottenendo:

$$1 = \frac{G_{\omega,\lambda}(d)}{G_{\omega,\lambda}} + \frac{G_{\omega,\lambda}(\rho)}{G_{\omega,\lambda}} + \frac{G_{\omega,\lambda}(T)}{G_{\omega,\lambda}}$$

Così facendo si definiscono rispettivamente:

$$d_{\omega,\lambda} = \frac{G_{\omega,\lambda}(d)}{G_{\omega,\lambda}} \longrightarrow$$ coefficiente di assorbimento monocromatico direzionale

$$\rho_{\omega,\lambda} = \frac{G_{\omega,\lambda}(\rho)}{G_{\omega,\lambda}} \longrightarrow$$ coefficiente di riflessione monocromatico direzionale

$$\mathcal{T}_{\omega,\lambda} = \frac{G_{\omega,\lambda}(\mathcal{T})}{G_{\omega,\lambda}} \longrightarrow$$ coefficiente di trasmissione monocromatico direzionale

Quindi possiamo scrivere:

$$d_{\omega,\lambda} + \rho_{\omega,\lambda} + \mathcal{T}_{\omega,\lambda} = 1$$

Analogamente si può scrivere:

$$G_\lambda = G_\lambda(\alpha) + G_\lambda(\rho) + G_\lambda(\tau)$$

e quindi:

$$1 = \frac{G_\lambda(\alpha)}{G_\lambda} + \frac{G_\lambda(\rho)}{G_\lambda} + \frac{G_\lambda(\tau)}{G_\lambda} = \alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda$$

α_λ, ρ_λ e τ_λ vengono detti rispettivamente coefficiente di assorbimento monocromatico emisferico, coefficiente di riflessione monocromatico emisferico, coefficiente di trasmissione monocromatico emisferico. Facendo ora riferimento alla radiazione totale si ottiene:

$$G = G_\alpha + G_\rho + G_\tau$$

e analogamente:

$$1 = \frac{G_\alpha}{G} + \frac{G_\rho}{G} + \frac{G_\tau}{G} = \alpha + \rho + \tau$$

dove α, ρ, τ sono rispettivamente il coefficiente di assorbimento, il coefficiente di riflessione e il coefficiente di trasmissione. Riconsideriamo ora il corpo e la cavità visti in precedenza. Supponiamo che le superfici di questi due oggetti assorbano qualsiasi radiazione termica incidente. Questi "assorbitori ideali" prendono il nome di corpi neri. Quindi un corpo avente le caratteristiche di assorbire completamente tutte le radiazioni che incidono su di esso e di emettere più di qualsiasi altro corpo alla medesima temperatura viene detto corpo nero. Quindi un corpo nero è anche un emettitore ideale, cioè emette tanta potenza termica quanta ne assorbe, su tutto lo spettro e in tutte le direzioni. Perciò il corpo nero è il modello a cui si rapportano le caratteristiche radiali dei corpi reali. Vediamo di dimostrare quanto appena detto. Supponiamo che corpo e cavità si trovino in uno stato di mutuo equilibrio. Il sistema complessivo sarà allora in uno stato di equilibrio globalmente stabile. Ma supponiamo per assurdo che l'assorbitore ideale interno non sia un emettitore ideale e che quindi emetta meno radiazioni di quante ne assorba. Questo provoca un accumulo di energia nel corpo interno a spese di quello del corpo esterno. Ma ciò è chiaramente assurdo in quanto si tratterebbe di un processo spontaneo da uno stato di equilibrio stabile verso uno stato di non equilibrio. Quindi per definizione nulla può essere riflesso da un corpo nero. Le conseguenze più rilevanti di quanto detto sono che:

1) un corpo nero assorbe ed emette in modo isotropo. Dunque per un corpo nero valgono le seguenti relazioni:

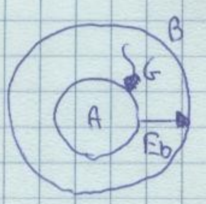
$$E_\lambda = \pi I_\lambda^e$$

$$G_\lambda = \pi I_\lambda^i$$

$$J_\lambda = \pi I_\lambda^{e+R}$$

2) tutta l'energia "lasciata" dal corpo nero è emessa.

Vediamo ora il caso di un corpo nero in una cavità. Consideriamo la seguente situazione:



Sia $C = A \cup B$ il sistema complessivo.

Supponiamo che il sistema C sia isolato e si trovi in uno stato C_1 di equilibrio stabile. Indichiamo con E_b l'emissione da corpo nero.

Quindi se A è un corpo nero, esso emette quanto assorbe. Quindi:

$$E_b = G_b = J_b$$

Tale radiazione non dipende né dal tipo di materiale né dalla forma dell'oggetto e può quindi essere considerata come una proprietà degli stati di equilibrio stabile. Quindi in A non abbiamo accumulo di energia. Siccome poi il sistema C è isolato, indipendentemente dalla natura della superficie di B, non avremo accumulo di energia neppure in B. Quindi le temperature di A e B rimangono invariate tra loro, cioè A e B rimangono in stato di mutuo equilibrio e quindi C rimarrà in stato di equilibrio stabile. Quindi la radiazione da corpo nero è tipica degli stati di equilibrio stabile. Secondo Stefan e Boltzmann il potere emissivo emisferico integrale del corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta e quindi:

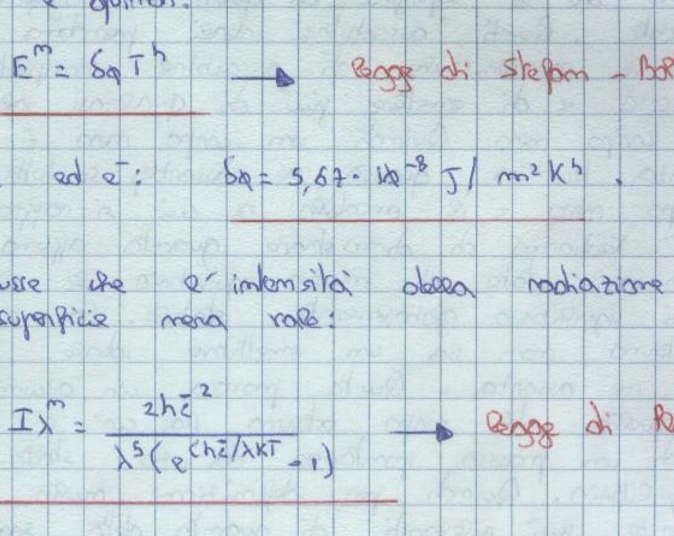
$$E^n = \sigma_0 T^4 \longrightarrow \text{legge di Stefan - Boltzmann}$$

dove σ_0 è una costante ed è: $\sigma_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ J/m^2K^4$.

Successivamente Planck dedusse che l'intensità della radiazione monocromatica emisferica emessa dalla superficie nera vale:

$$I_\lambda^n = \frac{2h\bar{c}^2}{\lambda^5\left(e^{ch\bar{c}/\lambda KT} - 1\right)} \longrightarrow \text{legge di Planck}$$

dove $\bar{c} = c/n$ con n che è l'indice di rifrazione. Per definizione l'indice di rifrazione è il rapporto tra le velocità tra due mezzi separati da una linea di separazione. Graficamente si ha:



ϑ_T = angolo di trasmissione.

Quindi: $n = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Pertanto $\bar{c}$ è la velocità di propagazione nel mezzo, e $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ Js$ è la costante di Planck. Quindi possiamo scrivere:

$$E_\lambda^m = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left(e^{(hc/\lambda K T)}-1\right)} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{(C_2/\lambda T)}-1\right)}$$

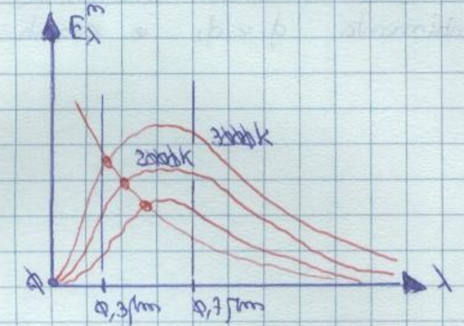
e quindi:

$$E_\lambda^m = E_\lambda^m(\lambda, T)$$

Le costanti C_1 e C_2 sono dette prima e seconda costante di Planck e valgono:

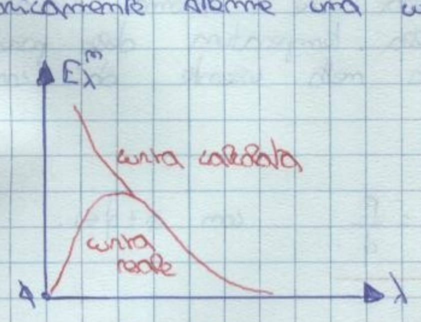
$$\begin{cases} C_1 = 2\pi c^2 h = 3,7413 \cdot 10^8 \ W \mu m^4/m^2 \\ C_2 = 1,4388 \cdot 10^4 \ \mu m K \end{cases}$$

Il risultato viene riportato qui graficamente in un diagramma (E_λ^m, λ) in cui vengono tracciate le curve isoterme. Si noti che solo per temperature maggiori di 2000 K, l'emissione del corpo nero diventa significativa nel campo visibile.



Quindi, per la legge di Stefan-Boltzmann ad un aumento di temperatura T corrisponde un aumento di area sottesa dalle curve pari a T^4.

Planck teoricamente ottenne una curva di questo tipo:



Si noti che la curva calcolata differisce da quella reale. Per risolvere questo problema, Planck fu costretto a quantizzare l'energia, definendo per l'appunto la costante di Planck

Si noti che nelle precedenti espressioni compariva il termine k. Esso è la costante di Boltzmann e vale:

$$K = 1,3805 \cdot 10^{-23} \ J/K.$$

Calcoliamo ora i punti di massimo della legge di Planck rispetto alla frequenza:

$$E_\lambda^m = \frac{C_1}{\lambda^5 e^{(C_2/\lambda T)}} \Rightarrow \frac{dE_\lambda^m}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(C_1 \lambda^{-5} e^{-(C_2/\lambda T)}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dE^m}{d\lambda} = -5C_1\lambda^{-6} e^{(-C_2/\lambda T)} + C_1 \lambda^{-5} \frac{C_2}{\lambda^2 T} e^{-(C_2/\lambda T)}$$

Eguagliando a zero quest'ultima derivata si ottiene:

$$\frac{dE_\lambda^n}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda T = \frac{c_2}{5} = 2897,0\ \mu m K$$

Quindi il potere emissivo integrale emisferico del corpo nero è dato da:

$$E^n = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda = \sigma_0 T^4$$

La costante σ_0 viene detta costante di Stefan-Boltzmann. L'espressione:

$$\lambda T = 2897,5$$

viene anche detta legge dello spostamento di Wien. Consideriamo ora una cavità vuota di materia ma piena di una radiazione di intensità I supposta isotropa ed omogenea. La cavità è termicamente isolata dall'ambiente circostante e contiene due corpi caratterizzati dai coefficienti di assorbimento a_1 e a_2 e aventi superficie esterna A_1 e A_2.

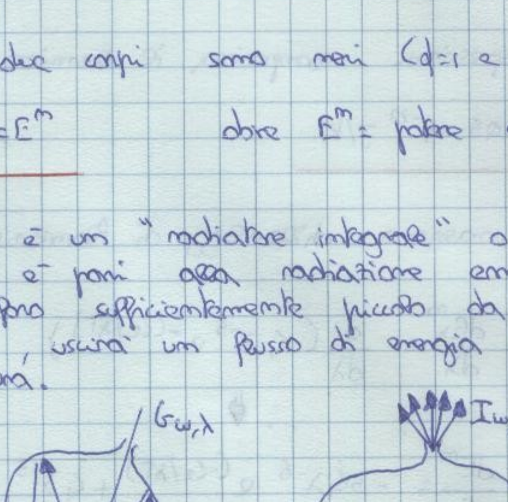
Il secondo principio della termodinamica ci assicurerà che il sistema rimarrà in uno stato di equilibrio caratterizzato da uguaglianza della temperatura delle pareti della cavità e dei corpi contenuti in essa, e che il flusso netto uscente dai corpi stessi deve essere nullo. Quindi:

$$\begin{cases} a_1 A_1 I = A_1 E_1 \\ a_2 A_2 I = A_2 E_2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{E_1}{a_1} = \frac{E_2}{a_2} = \frac{E}{a} \qquad \text{con } 0 \le a \le 1.$$

Nel caso particolare in cui i due corpi sono neri ($a = 1$ e $E = E^n$) si ottiene:

$$I = E^n \qquad \text{dove } E^n = \text{potere emissivo del corpo.}$$

Quindi la cavità isoterma è un "radiatore integrale" o "emettitore integrale" perché la radiazione che la riempie è pari alla radiazione emessa dal corpo nero a quella temperatura e perciò da un foro sufficientemente piccolo da non perturbare l'equilibrio termodinamico del sistema, uscirà un flusso di energia raggiante pari a quella del corpo nero a quella temperatura.



Il piccolo foro praticato nella cavità isoterma si comporta in assorbimento come un corpo nero poiché tutte le radiazioni che penetrano nella cavità rimangono per intero assorbite attraverso un gioco di riflessioni ripetute e ciò indipendentemente dal materiale costituente le pareti della cavità. Il corpo nero è dunque per definizione quel corpo che, per ogni temperatura e lunghezza d'onda, emette ed assorbe la massima quantità possibile di energia. Consideriamo ora il caso delle pareti a specchio. Queste pareti non interagiscono in nessun modo con le radiazioni. Se riconsideriamo la cavità di prima, e se le pareti della cavità non sono completamente a specchio, le radiazioni del corpo interagiscono con le pareti della cavità e si portano all'equilibrio. In sostanza l'interazione tra le pareti e il corpo permette una ridistribuzione dell'energia del corpo stesso sempre in un unico modo: da corpo nero. Quindi dal foro uscirà una distribuzione da corpo nero. Se invece le pareti della cavità sono completamente a specchio allora le radiazioni del corpo si rimbalzeranno tornando indietro sempre uguali. Abbiamo visto in precedenza che il coefficiente di assorbimento è pari a:

$$\alpha = \frac{E}{I} = \frac{E}{E^n} = \varepsilon$$

Tale rapporto viene anche detto coefficiente di emissione che indichiamo con ε. Esso rappresenta l'energia emessa dal corpo reale rispetto a quella emessa dal corpo nero alla stessa temperatura. In generale per qualsiasi corpo si ha:

$$\alpha = \varepsilon$$

Quindi il coefficiente di emissione è pari al coefficiente di assorbimento. Questo fatto va sotto il nome di legge di Kirchoff. Si dimostra che all'equilibrio il coefficiente di assorbimento monocromatico uguaglia quello di emissione. Perciò:

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$$

Infatti sappiamo che:

$$\begin{cases} dQ^\alpha = \text{potenza assorbita} \doteq (I_\lambda^\alpha \, dA \cos\theta \, d\omega \, d\lambda) = (\alpha_{\lambda,\theta,\varphi} I_\lambda^i \, dA \cos\theta \, d\omega \, d\lambda) \\ dQ^e = \text{potenza emessa} \doteq (I_\lambda^e \, dA \cos\theta \, d\omega \, d\lambda) = (\varepsilon_{\lambda,\theta,\varphi} I_\lambda \, dA \cos\theta \, d\omega \, d\lambda) \end{cases}$$

Se mettiamo un corpo nero nella cavità e aspettiamo il raggiungimento dell'equilibrio termico si avrà:

$$dQ^e = dQ^\alpha$$ e il sistema complessivo sarà in stato di equilibrio stabile (T uniforme).

Quindi: $\alpha_\lambda G_\lambda = E_\lambda^n$

Chiaramente trattandosi di un corpo nero si ha che $\alpha_\lambda = 1$ e $\varepsilon_\lambda = 1 \Rightarrow G_\lambda = E_\lambda$ e pertanto

$$\alpha_\lambda G_\lambda = E_\lambda = \varepsilon_\lambda E_\lambda^n$$

e all'equilibrio termico $G_\lambda = E_\lambda^n$ e quindi: $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$.