

(135)

Visto però che:

$$q_c = h(T_f - T_{\infty}) = h(T_f - T_{\infty}) \quad \text{con } T_f = \text{temperatura della parete.}$$

si ha:

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial x} \big|_f}{T_f - T_{\infty}}$$

Quindi per calcolare h dobbiamo calcolare il campo di temperatura. Purtroppo però il campo di temperatura è influenzato dal campo di moto. Quindi siamo costretti a seguire un'altra strada. Partiamo dai gruppi adimensionali. Inanzitutto l'analisi dimensionale si basa sul principio di omogeneità dimensionale per una relazione tra grandezze fisiche. Al fine di esprimere le grandezze fisiche in gioco nella trasmissione del calore si possono utilizzare quattro grandezze fondamentali: lunghezza, massa, tempo, temperatura. Esiste un teorema noto come **teorema di Buckingham** il quale afferma che la relazione funzionale $q(G_1, \dots, G_m) = 0$ è esprimibile come una relazione tra parametri adimensionali. Consideriamo un fenomeno fisico con m variabili indipendenti $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, per le quali esiste una funzione di questo tipo:

$$P(Q_1, Q_2, \dots, Q_m) = 0$$

Supponiamo che le grandezze fondamentali siano per l'appunto $S=4$. Si possono ottenere $R=m-S$ gruppi adimensionali. Un **gruppo adimensionale** è un modello, è un insieme di variabili adimensionali. Quindi otteniamo:

$$\varphi(\Pi_1, \dots, \Pi_m) = 0$$

dove:

$$\begin{cases} \Pi_1 = Q_1^{a_1} Q_2^{b_1} \dots Q_S^{s_1} Q_{m+1} \\ \vdots \\ \Pi_m = Q_1^{a_m} Q_2^{b_m} \dots Q_S^{s_m} Q_{m+1} \end{cases}$$

Quindi questo teorema è utile perché permette di scrivere equazioni adimensionali, e perché le formulazioni adimensionali ci permettono di trattare problemi diversi tra loro con la stessa fisica. Supponiamo che $m=7$ e $S=4 \Rightarrow R=m-S=3$. Quindi si hanno tre gruppi adimensionali. Per esempio:

$$P = \tilde{P}(h, p, x, u, \mu, k, c_p) \Rightarrow h = \tilde{h}(p, u, x, \mu, c_p, k)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} Q_1 &= p \\ Q_2 &= x \\ Q_3 &= \mu \\ Q_4 &= k \\ Q_5 &= u \\ Q_6 &= c_p \\ Q_7 &= h \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$

$$\Pi_1 = p^{a_1} x^{b_1} \mu^{c_1} k^{d_1} u$$

$$\Pi_2 = p^{a_2} x^{b_2} \mu^{c_2} k^{d_2} c_p$$

$$\Pi_3 = p^{a_3} x^{b_3} \mu^{c_3} k^{d_3} h$$

Questi sono i nostri tre gruppi.

Dobbiamo ora trovare gli esponenti. Ricordiamoci che:

$$\begin{aligned} [\rho] &= \text{kg/m}^3, & [\mu] &= \text{kg/ms}, & [u] &= \text{m/s}, & [c_p] &= \text{m}^2/\text{s}^2\text{K} \\ [x] &= \text{m}, & [k] &= \text{mkg/s}^2\text{K}, & [h] &= \text{m}^5/\text{s}^3\text{K} \end{aligned}$$

stendiamo:

$$\Pi_1 = \frac{\text{kg}^{a_1+c_1+d_1} \text{m}^{b_1+d_1-3a_1-c_1}}{\text{s}^{c_1+3d_1} \text{K}^{d_1}} = \text{s/m}$$

e:

$$\begin{cases} a_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ d_1 = 0 \\ c_1 + 3d_1 = -1 \\ b_1 + d_1 - 3a_1 - c_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \\ c_1 = -1 \\ d_1 = 0 \end{cases}$$

Analizziamo:

$$\Pi_2 = \frac{\text{kg}^{a_2+c_2+d_2} \text{m}^{b_2+d_2-3a_2-c_2}}{\text{s}^{c_2+3d_2} \text{K}^{d_2}} = \frac{\text{s}^2\text{K}}{\text{m}^2}$$

$$\begin{cases} d_2 = -1 \\ c_2 + 3d_2 = -2 \\ a_2 + c_2 + d_2 = 0 \\ b_2 + d_2 - 3a_2 - c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 1 \\ c_2 = 0 \\ d_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Pi_3 = \frac{\text{kg}^{a_3+c_3+d_3} \text{m}^{b_3+d_3-3a_3-c_3}}{\text{s}^{c_3+3d_3} \text{K}^{d_3}} = \frac{\text{s}^3\text{K}}{\text{m}^2}$$

$$\begin{cases} d_3 = -1 \\ c_3 + 3d_3 = -3 \\ a_3 + c_3 + d_3 = 0 \\ b_3 + d_3 - 3a_3 - c_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 0 \\ b_3 = 0 \\ c_3 = 1 \\ d_3 = -1 \end{cases}$$

Concludendo si ottiene:

$$\Pi_1 = \frac{\rho x u}{\mu}$$

$$\Pi_2 = \frac{x h}{k}$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu c_p}{k}$$

Formiamo ora un significato fisico a questi tre gruppi. In particolare:

$$\Pi_1 = \frac{\rho x u}{\mu} \rightarrow \text{numero di Reynolds (Re)}$$

La sua utilità è legata al moto laminare e turbolento. Ricerchiamo tale numero in

questo modo:

$$\Pi_1 = Re = \frac{\rho x v}{\mu} = \frac{\rho x^3 (v/x^2)}{\mu} =$$

Notiamo immediatamente che il precedente rapporto è del tipo:

$$\left(\frac{\text{massa} \times \text{accelerazione}}{\text{spinta} \times \text{superficie}} \right) = \left(\frac{\text{forza di inerzia}}{\text{forza viscosa}} \right)$$

Quindi se Re è elevato la forza di inerzia comincia a prevalere sulla forza viscosa, e quindi il moto del fluido comincia a farsi turbolento. In particolare quando:

$Re > 2300 \Rightarrow$ il moto è turbolento

$Re < 2300 \Rightarrow$ il moto è laminare

Quindi 2300 è un valore critico. Analizziamo il secondo gruppo:

$$\Pi_2 = \frac{xh}{k} \rightarrow \text{numero di Nusselt (Nu)}$$

"Elaboriamo" anche questo numero:

$$\Pi_2 = Nu = \frac{xh}{k} = \frac{xh(T_w - T_\infty)}{k(T_w - T_\infty)} = \frac{h(T_w - T_\infty)}{k/x(T_w - T_\infty)}$$

Si noti che $h(T_w - T_\infty)$ è il flusso termico convettivo, e $\frac{k}{x}(T_w - T_\infty)$ è il flusso termico conduttivo sotto lo strato di temperatura $(T_w - T_\infty)$, per una x distanza x . Perciò Nu rappresenta il rapporto termico tra il flusso convettivo e il flusso conduttivo che avremmo se il flusso fosse fermo. Più il rapporto è elevato e maggiore è l'energia trasportata per convezione. In particolare si ha:

$$h = Nu \frac{k}{x}$$

Infine per il terzo gruppo si ha:

$$\Pi_3 = \frac{\rho \mu v}{k} \rightarrow \text{Numero di Prandtl}$$

Possiamo riscrivere anche così:

$$\Pi_3 = Pr = \frac{\rho \mu v}{k} = \frac{\rho \mu v}{\rho k} = \frac{\rho \mu v}{\rho k} = \frac{\rho \mu v}{\rho k} = \frac{1}{\rho} \frac{\mu v}{k}$$

dove ν è la viscosità cinematica. Per definizione tale viscosità è:

$$\nu = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)$$

Questo numero ci dice come il campo di temperatura si lega con il campo di velocità. Quindi mentre il numero di Prandtl è il rapporto tra gli spessori dello strato limite di velocità e di temperatura, possiamo anche vederlo in questo modo:

$$Pr = \frac{\text{diffusività molecolare della quantità di moto}}{\text{diffusività molecolare del calore}}$$

Il numero di Nusselt rappresenta l'incremento della potenza termica trasmessa per convezione attraverso uno strato di fluido rispetto a quella per conduzione attraverso lo stesso strato. Quindi questo numero è sempre maggiore di uno. Si noti inoltre che poiché nello strato limite la temperatura del fluido varia tra T_p e T_{∞} , e con la temperatura variano anche le proprietà termofisiche del fluido, e le proprietà del fluido per la determinazione del numero di Reynolds e del numero di Nusselt sono convenzionalmente valutate per un valore medio di temperatura detto **temperatura di film**. Tale temperatura è:

$$T_f = \frac{T_p + T_{\infty}}{2}$$

Torniamo ora alla convezione forzata e vediamo il comportamento dell'estremo della superficie. Abbiamo visto che un fluido è continuo, e per le ipotesi di continuità vale la **proprietà di non scollimento**. In breve quando il fluido raggiunge la parete, la sua distribuzione di velocità cambia. Infatti in prossimità della parete il fluido è costretto a muoversi alla stessa velocità della parete. Come è già stato detto, questo processo fa raffreddare l'interno fluido. Definiamo anche **coefficiente di attrito** la seguente espressione:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

Questo coefficiente ci dice che se anche aumenti la velocità per incrementare lo scambio energetico, questo comporta maggiori perdite per attrito con la parete. Abbiamo precedentemente parlato del moto laminare e del moto turbolento. Vediamo ora di capire meglio di che tipo può essere la corrente in un fluido. Approssimativamente la corrente di un fluido è composta da tanti filati chiamati per l'appunto **filati di fluido**. Se questi filati sono paralleli tra loro, allora il moto del fluido è laminare, altrimenti è turbolento. La corrente di un fluido può anche essere di due tipi:

- 1) **corrente a pelo libero**, come per esempio l'acqua che scorre in un fiume
- 2) **corrente forzata**, come per esempio l'acqua che scorre in un tubo.

Precedentemente noi abbiamo parlato implicitamente della corrente a pelo libero (geometria esterna). Concludiamo il discorso sulla geometria esterna supponendo che il numero di Prandtl sia unitario. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_w - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U_{\infty}} \right) \Rightarrow \frac{1}{T_w - T_{\infty}} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{U_{\infty}} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{Quindi: } q = -k \frac{\partial T}{\partial y} \text{ e } \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{q}{\tau} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial T}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{k}{\mu} \frac{T_{\infty} - T_w}{U_{\infty}} = \frac{k}{\mu} \frac{T_w - T_{\infty}}{U_{\infty}}$$

Questa ultima relazione è vera su tutta la superficie. Avremo quindi:

$$q_w = h(T_w - T_\infty) \quad \text{e} \quad j_w = \frac{1}{2} c_p \rho U_\infty^2$$

Perciò:

$$\frac{k}{\delta} \frac{T_w - T_\infty}{U_\infty} = \frac{h(T_w - T_\infty)}{\frac{1}{2} c_p \rho U_\infty^2} \Rightarrow h = \frac{k}{2\delta} c_p \rho U_\infty^2$$

Questa ultima relazione può essere così scritta:

$$\frac{c_p}{2} \frac{\rho U_\infty}{\delta} x = \frac{h}{k} \delta \Rightarrow Nu_x = \frac{c_p}{2} Re_x \rightarrow \text{analogia di Reynolds.}$$

Questa analogia ci dice che l'efficienza dello scambio convettivo è smorzata dalle perdite di attrito presenti nelle pareti. Nel caso in cui il numero di Prandtl non sia unitario, vale una versione "modificata" dell'analogia di Reynolds. Cioè:

$$Nu_x = \frac{c_p}{2} Re_x Pr^{1/3}$$

Concludiamo quindi questa "parte" sulla geometria interna dicendo che nel moto turbolento si ha una maggiore capacità di scambio termico. Vediamo ora la convezione forzata nella geometria interna. Qui lo studio dello scambio termico è equivalente a quello illustrato per la lastra piana, anche se lo sviluppo degli strati limite pseudodinamico e termico sono soggetti al vincolo costituito dal confinamento del moto nel condotto. Si noti che nel tratto iniziale di un condotto si hanno gli sviluppi degli strati limite. Superato questo tratto i profili non si modificano morfologicamente e si è in presenza di profili detti sviluppati. Per il moto all'interno dei condotti si definisce il numero di Reynolds in questo modo:

$$Re = \frac{\rho V_{md} D}{\mu}$$

dove V_{md} è la velocità media di sezione ed è ottenuta come rapporto tra la portata massica ed il prodotto tra la massa volumica ρ e l'area della sezione del condotto. Abbiamo precedentemente visto che 2300 è un valore critico per il numero di Reynolds. In realtà il numero di Reynolds critico per la transizione laminare-turbolenta è:

$$Re = 2300 \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{se } Re \leq 2300 & \Rightarrow \text{moto laminare} \\ \text{se } 2300 \leq Re \leq 10000 & \Rightarrow \text{transizione laminare-turbolenta} \\ \text{se } Re > 10000 & \Rightarrow \text{moto turbolento.} \end{array}$$

Supponiamo ora di avere due lastre piane mantenute a temperatura costante attraverso le quali scorre un fluido.



Possiamo pensare che ogni lastra generi un proprio profilo di temperatura e velocità. All'inizio le due lastre non interagiscono, ma ad un certo punto i due strati limite interagiscono. Se i due flussi erano laminari, nel momento in cui i profili si toccano, il flusso totale rimane ancora laminare. Viceversa se i due flussi erano turbolenti, al momento del contatto rimangono turbolenti. Quindi ogni volta che i due strati limite si incontrano, il flusso rimane impetento, e in questo caso si parla di **struttura del flusso pienamente sviluppata**. Attenzione che non c'è possibilità che un flusso laminare pienamente sviluppato si metta in turbolenza all'interno del canale o viceversa. Questa è la differenza sostanziale con la geometria esterna. Quindi se $Re \geq 2300$, il flusso è turbolento mentre se $Re \leq 2300$ il flusso è laminare e anche se esso viene perturbato, esso ritorna ad essere laminare. Cioè l'ampiezza delle perturbazioni tende a smorzarsi. Abbiamo visto che all'interno dei tubi, il numero di Reynolds assume la seguente forma:

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} \quad \text{dove } D = \text{diametro del tubo.}$$

Calcoliamoci meglio V_m :

$$\dot{m} = \int_A \rho V_m(r) dA = V_m \int_A \rho dA$$

Si noti che nella regione pienamente sviluppata la velocità cerca di dipendere dalla posizione. Quindi:

$$V_m = \frac{\int_A V_m dA}{\int_A dA} \quad \text{dove } A = \text{area della sezione del canale.}$$

Infatti knowing la sezione di ingresso del canale, la conduttività λ cerca di avere importanza in quanto il fatto che il flusso sia laminare o turbolento dipende solo dalla distanza tra le due lastre. In molte applicazioni prodotte di riscaldamento e di raffreddamento di un fluido, si fa scorrere il fluido in un tubo e poi la superficie esterna del tubo viene riscaldata o raffreddata. Poiché nella sezione del condotto la velocità del fluido varia tra zero ed un valore massimo sull'asse del condotto, conviene quindi riferirsi alla velocità media di sezione:

$$V_m = \frac{\dot{m}}{\rho S}$$

Si noti che $\dot{m}$ è la portata massica mentre ρ è la massa volumica. Si dimostra che nel caso che il tubo sia circolare si ha:

$$\begin{cases} V_m = \frac{\dot{m}}{\rho \pi D^2} \\ Re = \frac{\dot{m}}{\mu \pi D} \end{cases}$$

Un altro parametro adimensionale importante è il **fattore di attrito** così definito (come abbiamo già visto):

(140)

$$\tilde{p} = \frac{-\partial p / \partial x D}{\frac{1}{2} \rho w_{\text{m}}^2}$$

dove p è la pressione del fluido.

Quindi:

$$\frac{-\partial p}{\partial x} = \tilde{p} \frac{1}{2} \rho w_{\text{m}}^2 / D \Rightarrow p(x) = p_i - \left(\tilde{p} \frac{\rho w_{\text{m}}^2}{2} \cdot \frac{1}{D} \right) x \quad (\text{dopo l'integrazione}).$$

In un tubo circolare si ha:

$$p(x) = p_i - \left(\tilde{p} \frac{8 \eta v}{\rho \pi^2 D^5} x \right)$$

Se p è uniforme nella sezione del tubo, k è unicamente determinato una volta fissati η e ρ , geometria del condotto a meno di variazioni della viscosità che però sono trascurabili. Consideriamo le possibili sezioni di canale. Chiamiamo **diametro equivalente** la seguente espressione:

$$D_{\text{eq}} \triangleq \frac{4A}{P}$$

dove P è il perimetro "bagnato" e A è l'area di passaggio. Un esempio diventa la idr. Consideriamo la seguente situazione:



III = area non permeabile del fluido

Consideriamo l'area e il perimetro: (non bagnati)

$$\begin{cases} A = \pi(R_2^2 - R_1^2) \\ P = 2\pi(R_1 + R_2) \end{cases} \Rightarrow D_{\text{eq}} = \frac{4\pi(R_2^2 - R_1^2)}{2\pi(R_1 + R_2)} = \frac{2(R_2^2 - R_1^2)}{(R_1 + R_2)}$$

Abbiamo precedentemente visto che:

$$k = \frac{4 \eta v}{\rho P} \quad \text{Infatti:} \quad k = \frac{\eta v D_{\text{eq}}}{\rho A} = \frac{\eta v \frac{4A}{P}}{\rho A} = \frac{4 \eta v}{\rho P}$$

Quindi in conclusione il diametro equivalente viene usato quando abbiamo a che fare con tubi non esattamente circolari. Concludiamo questa "parte" sulla convezione forzata vedendo qualcosa ancora sulla strato limite e sullo scambio termico. Lo scambio termico è maggiore dove lo strato limite è piccolo, cioè all'imbocco del canale. Definiamo anche la **temperatura di mescolamento adiabatico (T_b)**, che è costante, come la temperatura che si ottiene isolando due corredi di fluido perpendicolare al moto e mescolandoli adiabaticamente. Quindi:

$$T_b \triangleq \left(\frac{\int_A \rho w_{\text{m}} c_p T dA}{\int_A \rho w_{\text{m}} c_p dA} \right) = \text{costante}$$