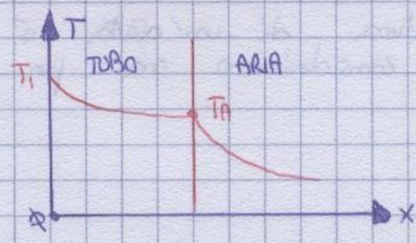
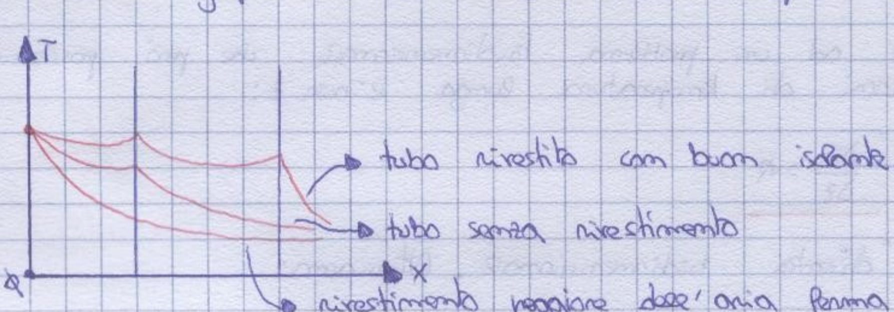
È risaputo che l'aria è un ottimo isolante termico quando il meccanismo interno è di tipo conduttivo e non convettivo. Consideriamo per esempio un tubo a contatto con l'aria:

In questo grafico è presente il profilo di temperatura del relativo tubo:



Si presti attenzione al fatto che se noi rivestiamo il tubo con dell'isolante, chiaramente il profilo di temperatura scende nel caso in cui il rivestimento sia un isolante peggiore dell'aria. Se il rivestimento è invece un buon isolante, il profilo di temperatura sale. Quindi graficamente si ha una cosa di questo tipo:



Parliamo ora delle superfici alettate. Si supponga di avere una superficie di scambio S a temperatura uniforme T_0. Tale superficie scambi potenza termica per convezione con un fluido a temperatura costante T_∞. Se si indica con h il coefficiente convettivo, la potenza termica scambiata tra la superficie e il fluido è:

$$\dot{Q} = hS(T_0 - T_\infty)$$

Parleremo più avanti della convezione. Per ora si prenda per buona la precedente espressione. Se si vuole aumentare la potenza termica scambiata a parità di salto termico, bisogna aumentare il prodotto hS. Si può fare ciò in due modi:

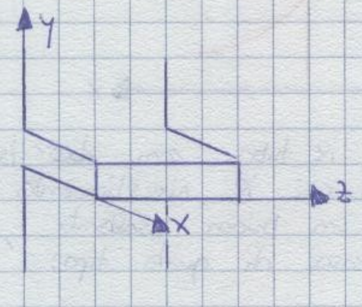
1) aumentando il coefficiente convettivo (h)

2) aumentando la superficie di scambio (S)

Per utilizzare il secondo metodo bisogna usare un sistema di alette. Ma cosa è una superficie alettata? Una superficie alettata è un dispositivo che viene usato per raffreddare quei componenti che, durante il proprio funzionamento, si troverebbero ad operare a temperature troppo elevate. Un esempio di superficie alettata è il dissipatore di una CPU. Di solito questi dispositivi sono realizzati con materiali ad elevata conduttività. Precedentemente abbiamo detto che per aumentare la potenza termica scambiata si può aumentare o "h" o "S". Si potrebbe anche aumentare T_0, ma il nostro obiettivo è proprio quello di diminuirlo oppure si potrebbe diminuire T_∞, ma purtroppo tale parametro non è facilmente controllabile dal progettista.

Quindi le superfici alettate servono per incrementare la potenza termica che un corpo può scambiare per convezione con il gas (spesso l'aria) o con il liquido in cui è immerso.

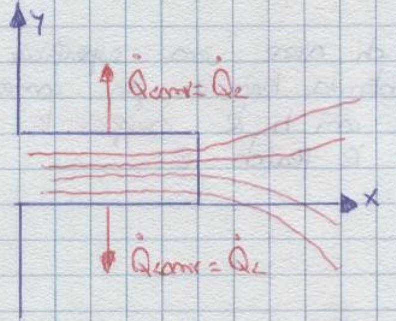
Si noti che la temperatura di un'aletta è più alta alla radice e più bassa all'estremità libera. Consideriamo ora per semplicità una singola aletta:



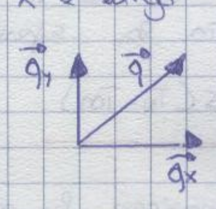
Ci troviamo di fronte ad un problema tridimensionale che però possiamo semplificare trascurando le variazioni di temperatura lungo l'asse z:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Il problema quindi diventa bidimensionale. Otteniamo:



Possiamo scomporre il flusso termico considerando la componente lungo l'asse x e lungo l'asse y. Quindi:



$$\vec{q} = \vec{q}_x + \vec{q}_y = q_x \vec{u}_x + q_y \vec{u}_y$$

Si noti che le linee di flusso termico tendono a divergere. Poiché il meccanismo di scambio termico tra l'aletta e il fluido è di tipo convettivo, si ha:

$$q_y = h(T - T_\infty)$$

Siccome però vale la legge di Fourier, si ha:

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

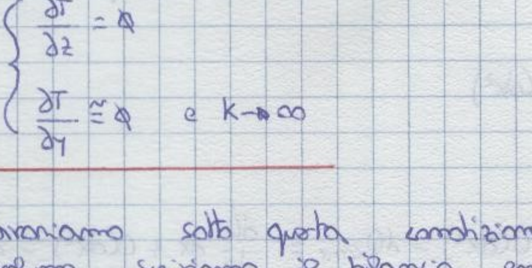
Si presti attenzione al fatto che se $q_y = 0$, l'aletta risulterebbe adiabatica. Per fare un'analisi monodimensionale della stessa, bisogna che:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad e \quad k \to \infty \quad \text{per avere } q_y \neq 0 \text{ ma finito}$$

Questa condizione significa che l'aletta deve essere un buon conduttore termico. Quindi le ipotesi di monodimensionalità sono:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial z}=0\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial y}\cong 0 \quad e \quad k\to\infty\end{cases}$$

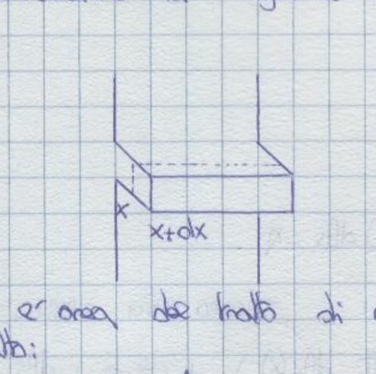
Quindi ora lavoriamo sotto questa condizione. Supponiamo ora che l'aletta non possieda variazioni di volume, scriviamo il bilancio energetico per un elemento infinitesimo di volume Sdx. Consideriamo la seguente figura:



Indichiamo con P il perimetro. Si ha:

$$A_s = P\,dx$$

dove A_s è l'area del tratto di aletta compreso tra x e $x+dx$. Vediamo di disegnare meglio questo tratto:



Si ricordi che q_c è il flusso termico convettivo. Possiamo dunque scrivere:

$$\dot{Q}(x) = \dot{Q}(x+dx) + q_c A_s$$

Si ricordi che:

$$\begin{cases}\dot{Q}(x) = -kS\left.\dfrac{dT}{dx}\right|_x\\[2ex] \dot{Q}(x+dx) = -kS\left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x+dx}\end{cases}$$

Sviluppando in serie la precedente espressione ottengo:

$$\dot{Q}(x) = \left(\dot{Q}(x) + \frac{d\dot{Q}}{dx}dx + \delta(dx^2) + q_c\,dA_s\right)$$

Se ora trascuriamo gli infinitesimi di ordine superiore al primo, abbiamo:

$$\dot{Q}(x) = \left(\dot{Q}(x) + \frac{d\dot{Q}}{dx}dx + 0 + q_c\,dA_s\right)$$

Quindi alla fine ottengo la seguente equazione di bilancio:

$$\frac{d\dot{Q}}{dx} + q_c\frac{dA_s}{dx} = 0$$

Si presti attenzione al fatto che questo bilancio può anche essere scritto in questa maniera:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x+dx) - d\dot{Q}_{conv}$$

dove $d\dot{Q}_{conv}$ è la derivata del calore scambiato per convezione. In particolare si ha:

$$\dot{Q}_{conv} = h(T - T_\infty)\, dA_s$$

Sviluppiamo ora in serie di Taylor il calore scambiato sulla faccia esterna della sezione dell'aletta:

$$\dot{Q}(x+dx) = \dot{Q}(x) + \frac{d\dot{Q}}{dx}dx + O(dx^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \cancel{\dot{Q}(x)} - \cancel{\dot{Q}(x)} + \frac{d\dot{Q}}{dx}dx + O(dx^2) - dQ_{conv} = \frac{d\dot{Q}}{dx}dx + O(dx^2) - dQ_{conv} =$$

$$= \frac{d\dot{Q}}{dx} + h(T - T_\infty)\, dA_s = 0$$

Quindi: $\dfrac{d\dot{Q}}{dx} + h(T - T_\infty)\, dA_s = 0$

Siccome però: $\dot{Q} = -kA_c \dfrac{dT}{dx} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(-kA_c \dfrac{dT}{dx}\right) + h(T - T_\infty)\, dA_s = 0$

$$\Downarrow$$

TRASCURO ORDINI SUPERIORI

$$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}A_c(x) + \cancel{\frac{dT}{dx}\frac{dA_c(x)}{dx}}\right) - h(T - T_\infty)\frac{dA_s}{dx}$$

NB: A_c = area laterale.

Nel caso più generale un'aletta ha una sezione variabile. Noi ora, per semplicità, supponiamo di avere un'aletta con sezione costante. Quindi:

$$\begin{cases} A_c = \tilde{A}_c(x) = \text{costante} \\ P = \tilde{P}(x) = \text{costante} \end{cases}$$

Riconsideriamo ora la precedente equazione:

$$kA_c \frac{d^2T}{dx^2} = h(T - T_\infty)\cdot P \qquad \text{dove } P = \frac{dA_s}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(-kA_c \frac{dT}{dx}\right) = \left(-kA_c \frac{d^2T}{dx^2} - k\cancel{\frac{dA_c}{dx}}\frac{dT}{dx}\right) = \left(-kA_c \frac{d^2T}{dx^2}\right)$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione differenziale che integrata ci fornisce il campo di temperatura monodimensionale dell'aletta. Quindi:

$$\left(-kA_c \frac{d^2T}{dx^2} + hP(T - T_A)\right) = 0 \qquad \text{dove } T_A = \text{temperatura dell'aria.}$$

Posto:

$$\theta = (T - T_A) \Rightarrow \left(-kA_c \frac{d^2\theta}{dx^2} + hP\theta\right) = 0 \quad \text{cioè:} \quad \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) = 0$$

Si noti infatti che: $\left(\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \dfrac{hP}{kA_c}\theta\right) = 0$ e posto $m \triangleq \left(\dfrac{hP}{kA_c}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) = 0$

Abbiamo così ottenuto la seguente equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, e a coefficienti costanti:

$$\left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - m^2\vartheta\right) = 0$$

Integriamola:

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie. Si ottiene inoltre anche l'espressione del flusso termico conduttivo lungo l'aletta:

$$q_k(x) = \left(-k\frac{dT}{dx}\right) = \left(-k\frac{d\vartheta}{dx}\right) = \left(-km\left(C_1e^{mx} - C_2e^{-mx}\right)\right)$$

Vogliamo ora trovare le due costanti arbitrarie. Per fare ciò dobbiamo imporre delle condizioni al contorno. Consideriamo prima il caso di un'aletta di lunghezza infinita:

per $x \to \infty$, $T \to T_\infty$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \vartheta = \vartheta_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \infty \\ \vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \vartheta_0 \text{ e } C_2 = 0$$

Quindi sostituendo le due costanti appena trovate nell'integrale generale, si ottiene:

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{mx}$$

Supposto però che la temperatura della base dell'aletta sia:

$$T(0) = T_b \Rightarrow \vartheta(0) = \vartheta_0 = T_b - T_\infty$$

Abbiamo che:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{mx} \qquad \text{con } T_0 = T_b$$

Si ricordi infatti che $\vartheta = T - T_\infty = T - T_A$ nel caso in cui il fluido che lambisce l'aletta è aria. La potenza termica globalmente dissipata dall'aletta si potrebbe valutare determinando la potenza termica che per conduzione attraversa la sezione della sbarra (aletta). Quindi:

$$\dot{Q}_\infty = -kS\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \Rightarrow \dot{Q}_\infty = \sqrt{hPkS}\,(T_0 - T_\infty)$$

Per caratterizzare il comportamento di una superficie alettata si introduce l'efficienza dell'aletta definita come:

$$\eta \triangleq \frac{\text{FLUSSO EFFETTIVO SCAMBIATO}}{\text{FLUSSO MASSIMO SCAMBIATO}}$$

Nel nostro caso si ha:

$$\eta \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{iso}} = \frac{hP\vartheta_a}{m} \frac{1}{hA_L\vartheta_a} = \frac{P}{mA_c} = \frac{1}{mL} \quad \text{con } \dot{Q}_{iso} = A_s h \vartheta_a$$

Quindi l'efficienza dell'aletta può essere vista come il rapporto tra la potenza reale scambiata e quella che si scambierebbe se l'aletta fosse isoterma ($\vartheta = \vartheta_a$). Chiamiamo:

$$\dot{Q}_{MAX} = hA_s(T_a - T_A)$$

la potenza termica massima che l'aletta può disperdere. Siccome:

$$A_s = \int dA_s = \int P dx = P\int dx = P \cdot L$$

$$\eta \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}_{MAX}} = \frac{kA_c m\vartheta_a}{hPL(T_a - T_A)} = \frac{1}{mL}$$

Consideriamo ora il caso di un'aletta di lunghezza finita e con estremità adiabatica. In questo caso le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \vartheta = \vartheta_a \end{cases}, \quad \begin{cases} x = L \\ d\vartheta/dx = 0 \end{cases}$$

La sostituzione delle condizioni al contorno nella soluzione consente di ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \vartheta_a \\ C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\vartheta}{\vartheta_a} = \frac{e^{-mx}}{1+e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1+e^{2mL}}$$

ovvero:

$$T = T_\infty + (T_a - T_\infty)\frac{ch(m(L-x))}{ch(mL)}$$

Si ricordi ovviamente che per definizione:

$$ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Quindi:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\vartheta_a e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \\ C_2 = \dfrac{\vartheta_a e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \vartheta_a \dfrac{e^{-mL}}{2ch(mL)} \\ C_2 = \vartheta_a \dfrac{e^{mL}}{2ch(mL)} \end{cases}$$

Sostituendo ora queste due costanti trovate nel precedente integrale, troviamo:

$$g(x) = \frac{g_0}{2\,Ch(mL)}\left(e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}\right)$$

La potenza globalmente dissipata dalla aletta è:

$$\dot{Q} = -kS\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \sqrt{hPKS}\,(T_0 - T_\infty)\,Th(mL) = \dot{Q}_\infty\,Th(mL)$$

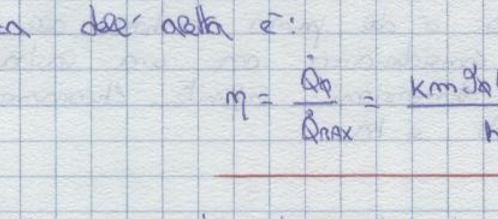
dove Th è la tangente iperbolica. Per definizione:

$$Thx = \frac{Shx}{Chx} \quad \text{con} \quad Shx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Qui l'efficienza dell'aletta è:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{max}} = \frac{km\,g_0 A_c\,Th(mL)}{hPL\,g_0}$$

Si noti che l'aletta con estremità adiabatica può essere approssimata ad un'aletta di lunghezza infinita quando $Th(mL) \to 1$. Vediamo ora un esempio sulle alette. Supponiamo di avere un'aletta di alluminio lunga 25mm, spessa 1mm e larga 300 mm. Supponiamo che sia investita da una corrente d'aria a 30°C. Il coefficiente di scambio termico tra l'aletta e l'aria è 100 W/m²K mentre la temperatura della radice dell'aletta è di 90°C. Determinare la potenza scambiata dall'aletta supponendo di trascurare la frazione dispersa attraverso la sua punta. (ip: K = 200 W/(mK)). Abbiamo:



Calcoliamo area e perimetro:

$$\begin{cases} A = l\cdot s = 0{,}002\,m \\ P = 2(l+s) = 3\cdot 10^{-4}\ m^2 \end{cases}$$

Quindi:

$$\dot{Q} = \sqrt{hPKA}\ \ Q_b\,Th(mL)$$

con: $m = \sqrt{\dfrac{hP}{kA}} = 31{,}675\ m^{-1}$

$Q_b = T_b - T_A = 60°C$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \sqrt{100\cdot 0{,}602\cdot 200\cdot 3\cdot 10^{-4}}\ \ 60\,Th(mL) \cong \underline{75{,}2\ W}.$$

Si ricordi infine che la temperatura T_b è la temperatura della radice della aletta.