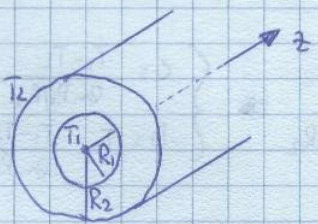
Formiamo ora un'interpretazione dell'equazione della diffusione in forma cilindrica. Si consideri come caso elementare un cilindro cavo, isotropo e omogeneo e infinito nella direzione z, di raggio interno R_1 ed esterno R_2.



Qui l'operatore laplaciano assume la seguente forma:

$$\nabla^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Se siamo di fronte ad una geometria cilindrica monodimensionale abbiamo:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

e quindi la temperatura risulta dipendere solo dalla coordinata radiale R. Quindi:

$$\nabla^2 T = \left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dT}{dR}\right)\right) = \left(\frac{1}{R}\frac{dT}{dR} + \frac{d^2T}{dR^2}\right)$$

Si noti che la derivata non è più parziale. Integriamo questa equazione:

$$\left(k\vec{\nabla}^2 T + \delta\right) = \left(\frac{k}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dT}{dR}\right) + \delta\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dT}{dR}\right) = -\frac{\delta}{k} \Rightarrow \frac{d}{dR}\left(R\frac{dT}{dR}\right) = -\frac{\delta R}{k} \Rightarrow d\left(R\frac{dT}{dR}\right) = -\frac{\delta R}{k}dR$$

Quindi:

$$R\left(\frac{dT}{dR}\right) = -\frac{\delta R^2}{2k} + C \Rightarrow \frac{dT}{dR} = -\frac{\delta R}{2k} + \frac{C}{R} \Rightarrow dT = \left(-\frac{\delta R}{2k} + \frac{C}{R}\right)dR$$

$$\Downarrow$$

$$T(R) = -\frac{\delta R^2}{2k} + C\ln R + D$$

dove C e D al solito sono le costanti di integrazione. Calcoliamoci il flusso termico:

$$\vec{q}(R) = \left(-k\frac{dT}{dR}\right) = \left(\frac{\delta R}{2k} - \frac{kC}{R}\right)\vec{\rho}$$ dove $\vec{\rho}$ è il versore orientato nella direzione delle R crescenti.

Anche qui c'è una casistica da analizzare. Consideriamo prima il caso in cui $T_1 \neq T_2$ e non ci sia generazione interna di potenza ($\delta = 0$). Imponiamo le condizioni di contorno a temperatura imposta. Abbiamo:

$$\begin{cases} R = R_1 \\ T = T_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} R = R_2 \\ T = T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = C \ln R_1 + D \\ T_2 = C \ln R_2 + D \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} C = \dfrac{T_1}{\ln R_1} + D \\ D = T_2 - \left(\dfrac{T_1}{\ln R_1} + D\right) \ln R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2} \\ D = T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2} \ln R_1 \end{cases}$$

Quindi: $T = -\dfrac{\delta R^2}{4k} + \left(\dfrac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2}\right) \ln R + T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2} \ln R_1 =$

$$= -\frac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2} \ln R_1/R = -\frac{T_1 - T_2}{\ln R_2/R_1} \ln \frac{R}{R_1} + T_1$$

Nota la distribuzione di temperatura possiamo calcolarci il flusso termico areico:

$$\vec{q}(R) = -k \frac{dT}{dR} = +k\left(\frac{T_1 - T_2}{\ln R_2/R_1} \cdot 1/R\right) \vec{\rho}$$

Quindi:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_T}$$

Si ricordi che stiamo analizzando il caso in cui $\delta = 0$ e quindi possiamo usare il modello elettrico. Quindi:

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^H \int_0^{2\pi} \vec{q} \cdot \vec{n}\, (R\, d\varphi\, dz) =$$

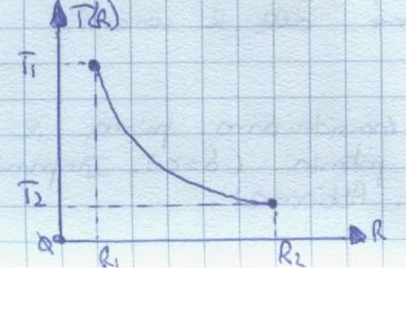
$$= \int_0^H dz \int_0^{2\pi} \vec{q} \cdot \vec{n}\, R\, d\varphi = \frac{k(T_1 - T_2)}{\ln R_2/R_1} \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \left(\frac{k(T_1 - T_2)}{\ln R_2/R_1}\, 2\pi H\right)$$

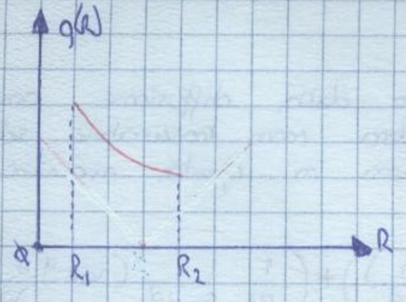
Quindi nella geometria cilindrica, la resistenza termica è:

$$R_T = \frac{\cancel{(T_1 - T_2)} \ln R_2/R_1}{k \cancel{(T_1 - T_2)}\, 2\pi H} = \frac{\ln R_2/R_1}{k 2\pi H}$$

Vediamo graficamente l'andamento di $T(R)$ e $\vec{q}(R)$:



NB: $S(R) = H 2\pi R$ dove H = altezza del cilindro



Anche qui in generale si può scrivere: $R_{TOT} = \sum_i R_i = \left(\frac{1}{K_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{K_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \dots \right) \frac{1}{2\pi L}$

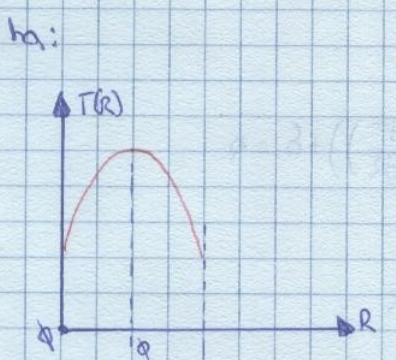
$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_m}{\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{K_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \dots + \frac{1}{K_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} \right)}$$

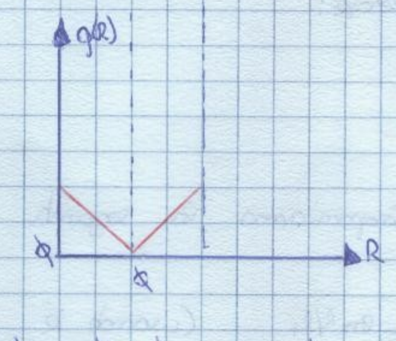
Supponiamo ora che ci sia una generazione interna di potenza, e quindi $\delta \neq 0$. Non si può usare il modello elettrico. In questo caso si ha:

$$T(R) = -\frac{\delta R^2}{4k} + \left(\frac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2} \right) \ln R + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln R_1/R_2} \ln R_1$$

$$\vec{g}(R) = -\frac{2\delta R}{4k} + k\left(\frac{T_1 - T_2}{\ln R_2/R_1} \cdot \frac{1}{R} \right)\vec{\rho} \quad \text{e se } T_1 = T_2 \Rightarrow \vec{g}(R) = -\frac{2\delta R}{4}$$

Graficamente si ha:





Molto spesso, capita di dover rivestire un filo conduttore con una guaina di isolante. Quando si procede all'isolamento di fili o di tubi di piccolo diametro, può accadere che l'aggiunta di isolante provochi un aumento del flusso termico scambiato a parità di salto di temperatura a causa dell'aumento della superficie esterna di scambio.

Vediamo ora di fornire un'interpretazione dell'equazione della diffusione anche nella geometria sferica. Anche in questo contesto se si considera non trascurabile solo la componente radiale, possiamo scrivere l'operatore Laplaciano in questa maniera:

$$\nabla^2 = \left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right)\right) + \left(\frac{1}{R^2 \operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\right) + \left(\frac{1}{R^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right) + \left(\frac{1}{R^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Supponendo che la geometria sferica sia monodimensionale, si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \phi \Rightarrow \nabla^2 T = \left(\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dT}{dR}\right)\right) = \left(\frac{d^2T}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dT}{dR}\right)$$

Quindi l'equazione di Fourier in regime stazionario, senza generazione di potenza, è:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dT}{dR}\right) = \phi$$

Si noti che questa equazione è alle derivate totali. Vediamo di integrarla:

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \phi \Rightarrow \nabla^2 T + \delta/_K = \phi \Rightarrow \nabla T = \int -\delta/_K \, dR = -\delta/_K R + A$$

Si presti attenzione al fatto che:

$$(K\nabla^2 T + \delta) = \left(\frac{K}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dT}{dR}\right)\right) + \delta = \phi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2T}{dR^2} = -\delta/_K$$

Alla fine si ottiene il seguente integrale generale:

$$T(R) = -\frac{\delta}{4K}R^2 + C\ln R + D$$

Come al solito C e D sono costanti arbitrarie. Imponiamo la seguente condizione al contorno:

$$\begin{cases} R = R_1 \\ T = T_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} R = R_2 \\ T = T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(R) = -\dfrac{T_1 - T_2}{\ln R_2/R_1}\ln R/R_1 \\ \vec{q}(R) = K\left(\dfrac{T_1 - T_2}{\ln R_2/R_1}\right)\dfrac{1}{R}\vec{\rho} \end{cases}$$ (usando il solito procedimento)

Per questo tipo di geometria noi ci limitiamo a studiare solo il caso in cui non c'è generazione interna di potenza ($S=Q$) e $T_1 \neq T_2$. Quindi consideriamo:

$$\begin{cases} T_1 = T(R_1) \\ T_2 = T(R_2) \end{cases}$$

→ nostra distribuzione di temperatura.

otteniamo:

$$\begin{cases} C = \dfrac{-T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2} \\ D = T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\, 1/R_1 \end{cases} \rightarrow T(R) = \left(-\frac{C}{R} + D\right) = \left(-\frac{(-T_1-T_2)/(1/R_1 - 1/R_2)}{R} + T_1 - \frac{T_1-T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\, 1/R_1\right)$$

$$= T_1 + \left(\frac{(T_1 - T_2)}{1/R_1 - 1/R_2}\right)\left(1/R - 1/R_1\right)$$

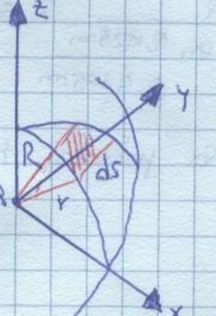
Analogamente si ha:

$$\vec{g}(R) = \left(k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2} \cdot \frac{1}{R^2}\right)\vec{\rho}$$

Anche qui possiamo sfruttare l'analogia con il modello elettrico in quanto $S=Q$. Quindi abbiamo:

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}} \qquad \text{con} \quad \dot{Q} = \int_S \vec{g}\cdot\vec{n}\, dS = \int_S g \cdot \vec{\rho}\cdot\vec{n}\, dS = \int_S g\, dS$$

Si noti chiaramente che nell'ultima espressione abbiamo utilizzato il teorema di Gauss. Quindi:



$$\dot{Q} = \int_S \vec{g}\cdot\vec{n}\, dS = \int_S \vec{g}\cdot\vec{n}\cdot r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\, \frac{1}{R^2} R^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\int_0^{2\pi} \left(-\cos\vartheta\right)_0^{\pi} d\varphi = k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\int_0^{2\pi} 2\, d\varphi = k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\, 2\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}\, 2\left(\varphi\right)_0^{2\pi} = 4\pi k\, \frac{T_1 - T_2}{1/R_1 - 1/R_2}$$

Perciò la resistenza termica in questo caso vale:

$$R_T = \frac{\cancel{T_1 - T_2}}{4\pi k\, \dfrac{\cancel{T_1 - T_2}}{1/R_1 - 1/R_2}} = \frac{1/R_1 - 1/R_2}{4\pi k} = \frac{R_2 - R_1/R_1R_2}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k}\, \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Vediamo ora un esempio di utilizzo delle coordinate cilindriche. Supponiamo di avere una tubazione di acciaio ($k_A = 37\ W/mK$) che diametro interno $D_i = 175\ mm$ e spessore $s = 15\ mm$ e avente una temperatura della superficie interna pari a $T_1 = 314°C$ e una temperatura della superficie esterna di $T_2 = 310°C$. Si vuole valutare lo spessore S_{is} dell'isolante ($K_{is} = 0,06$ W/mK) che si rende necessario per ridurre la potenza termica dispersa al 20% di quella corrispondente alle condizioni sopra precisate, nell'ipotesi che si stabilisca una temperatura $T_{is} = 80°C$ sulla superficie esterna dell'isolante. Abbiamo:

SENZA ISOLAMENTO

CON ISOLAMENTO

Siccome non c'è generazione interna di potenza ($\dot{G} = 0$) si può usare il modello elettrico. Abbiamo:

$$T_1 \;\text{—}\; R_{K_T} \;\text{—}\; T_2 \qquad \text{(senza isolamento)}$$

$$T_1 \;\text{—}\; R_{K_T} \;\text{—}\; R_{K_{is}} \;\text{—}\; T_{is} \qquad \text{(con isolamento).}$$

Quindi: $R_0 = \frac{D_i}{2} = 0,0875\,m$

$R_1 = R_0 + S_T = 0,1025\,m$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi K_A} \ln\frac{R_1}{R_0}} = \frac{314 - 310}{\frac{1}{2\pi\, 37} \ln\frac{0,1025\,m}{0,0875\,m}} \cong 5877,2\ W/m.$$

Noi sappiamo che $\frac{\dot{Q}_{is}}{L} = 0,2\,\frac{\dot{Q}}{L}$ visto che bisogna ridurre la potenza termica dispersa del 20%.

Pertanto: $\frac{\dot{Q}_{is}}{L} = 0,2 \cdot 5877,2\ W/m$.

Pertanto la potenza termica dispersa può essere espressa in funzione della resistenza termica complessiva ottenendo:

$$\frac{\dot{Q}_{is}}{L} = \frac{T_1 - T_{is}}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{K_A}\ln\frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{K_{is}}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

e risolvendo rispetto a R_2 si ha:

$$\ln\frac{R_2}{R_1} = K_{is}\left(\frac{T_1 - T_{is}}{\frac{1}{2\pi}\frac{\dot{Q}_{is}}{L}} - \frac{1}{K_A}\ln\frac{R_1}{R_0}\right) = 0,2\left(\frac{314 - 80}{\frac{1}{2\pi}\,1175,4} - \frac{1}{37}\ln\frac{0,1025\,m}{0,0875\,m}\right) \cong$$

$$\cong 0,23931 \Rightarrow R_2 = 0,1025\, e^{0,23931}\, m = m\ 0,1315$$