

Si noti che quest'ultima equazione è un'equazione integrale, e può essere risolta in due modi alternativi:

1) **soluzione forte**, in cui poniamo a zero la funzione integranda. Quindi:

$$\rho \left(v \frac{dT}{dt} - \delta + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right) = 0 \Rightarrow \underline{\rho \left(v \frac{dT}{dt} - \delta + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right) = 0}$$

Quest'ultima equazione prende le nome di **equazione della diffusione**.

2) **soluzione debole**, cioè poniamo:

$$\int_V \left(\rho \left(v \frac{dT}{dt} - \delta + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right) \right) dV = 0$$

Noi questa soluzione non la usiamo.

L'equazione della diffusione vale quando:

- 1) il mezzo è incompressibile
- 2) il mezzo è in quiete
- 3) non c'è scambio di materia
- 4) c'è scambio di calore
- 5) il sistema è semplice e monocomponente.

Abbiamo già visto cosa è la **conduttività termica**, ma non abbiamo parlato adeguatamente dei mezzi. In particolare nei **mezzi omogenei** la **conduttività termica** è continua, sia a tratti rispetto al vettore $\vec{R}$. Nei **mezzi omogenei** k , come tutte le proprietà intensive, è continua rispetto a $\vec{R}$. I materiali omogenei a loro volta possono essere:

1) **anisotropi**: quando in generale $\vec{q}$ e $\vec{\nabla} T$ non sono tra loro paralleli e quindi:

$$\underline{\vec{q} = -\vec{\bar{K}} \vec{\nabla} T} \quad \vec{\bar{K}} = \text{tensore}$$

2) **isotropi**: quando $\vec{\nabla} T$ e $\vec{q}$ sono paralleli. In questo contesto vale la **legge di Fourier**:

$$\underline{\vec{q}(\vec{P}) = \vec{q}(\vec{R}, t) = (-k \vec{\nabla} T)} \quad \text{con } k > 0$$

In sostanza, il flusso termico $\vec{q}$ ha la stessa direzione ma verso opposto al gradiente della temperatura, proprio perché il calore fluisce spontaneamente dalle zone calde verso le zone fredde. Siccome per i mezzi omogenei isotropi e incompressibili vale la legge di Fourier, si può scrivere:

$$\left(\rho c_v \frac{dT}{dt}\right) = (-\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \delta) \Rightarrow \left(\rho c_v \frac{dT}{dt}\right) = (k \vec{\nabla}^2 T + \delta)$$

Se come i mezzi sono incompressibili si ha:

$$c_v = c_p = c \Rightarrow \left(\rho c \frac{dT}{dt}\right) = (k \vec{\nabla}^2 T + \delta)$$

Per i mezzi non incompressibili ma che però eravamo a pressione costante si ha:

$$c_v = c_p \Rightarrow \left(\rho c_p \frac{dT}{dt}\right) = (k \vec{\nabla}^2 T + \delta)$$

dove:

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \rightarrow \text{operatore Laplaciano}$$

ci ritroviamo così a dover risolvere un'equazione differenziale con una derivata parziale di primo grado rispetto al tempo, e con derivate parziali rispetto allo spazio di secondo grado. Non è semplice la sua risoluzione, e quindi dobbiamo fissare le condizioni iniziali e poi le condizioni al contorno. Partiamo dalle condizioni iniziali:

$$t = 0 \Rightarrow \tilde{T}(\vec{R}, 0) = \tilde{T}(\vec{R})$$

Così facendo assegno ad ogni punto del volume di controllo una data temperatura. Restano ora le condizioni al contorno:

1) **condizione a temperatura imposta:** in questa condizione si impone il campo di temperatura per tutti i punti della frontiera del mio sistema, in ogni istante di tempo. Quindi:

$$\tilde{T}(\vec{R}_j, t) = \tilde{T}_j(t) \quad \text{con } \vec{R}_j \in J$$

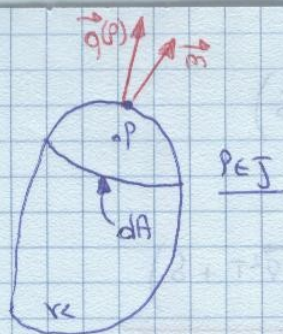
J è la frontiera del volume di controllo.

2) **condizione a flusso termico imposto:** in questa condizione si assegna al contorno la derivata normale della funzione $\tilde{T}$ in funzione del tempo. Quindi:

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right|_J = \tilde{g}(t)$$

Questa condizione rappresenta la conoscenza del flusso termico across alla superficie del sistema. Graficamente si ha:

10h



$P \in S$

$$\vec{q}_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

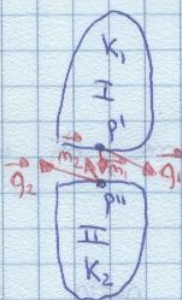
Si noti che $\vec{q}_t$ (flusso termico tangente) non siamo in grado di imporre.

3) condizione mista: in cui si assegna al contorno una combinazione lineare di $\tilde{T}$ e della sua derivata normale:

$$-k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \Big|_S = \left(\tilde{q}(\vec{R}, t) \cdot \tilde{T}(\vec{R}, t) + \tilde{\beta}(\vec{R}, t) \right) \Big|_S$$

4) condizione di compatibilità: in cui: $\vec{Q} = \vec{E}_P$

5) condizione di secondo: in questa condizione abbiamo due mezzi allora I e II e si ha scambio termico attraverso e interfaccia tra i due mezzi. Quindi:



$$\text{I} \begin{cases} T^{(1)} = \tilde{T}^{(1)}(\vec{R}, t) \\ q_n^{(1)} = -k_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n_1} \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} T^{(2)} = \tilde{T}^{(2)}(\vec{R}, t) \\ q_n^{(2)} = -k_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n_2} \end{cases}$$

Quindi: $\tilde{T}^{(1)}(\vec{R}, t) = \tilde{T}^{(2)}(\vec{R}, t) \Rightarrow k_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n_1} = k_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n_2}$ visto che $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \vec{n}$

In sostanza, all'interfaccia tra i due mezzi non potrà mai esserci o distinguersi potenza termica.

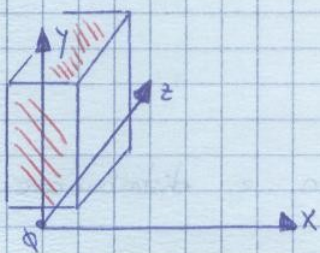
Detto ciò, possiamo integrare l'equazione della diffusione. Imporremo le seguenti condizioni di contorno:

1) STATO STAZIONARIO $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow k \nabla^2 T + \delta = 0$

2) GEOMETRIA MONODIMENSIONALE: dove ipotizziamo che la temperatura possiede derivata non nulla rispetto ad una sola delle coordinate della geometria utilizzata. Le altre coordinate vengono eliminate.

Studiamo ora la monodimensionalità nei casi della geometria piana, cilindrica e sferica. Partiamo dal caso più semplice e cioè dalla geometria piana.

Supponiamo che la temperatura sia costante lungo gli assi y e z :



/// = pareti adiabatiche.

Abbiamo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

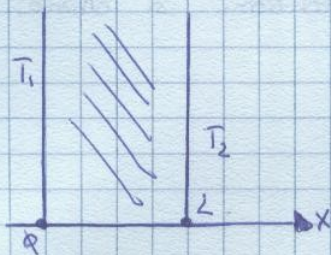
Questo tipo di approssimazione è valida per esempio quando abbiamo una barra sottile ma estesa. Impulsi:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{k}$$

Vediamo subito di definire una classificazione per i problemi di trasmissione del calore per conduzione. Vediamo subito il caso in cui non c'è generazione interna di potenza. Abbiamo:

$$\nabla^2 T = 0$$

Consideriamo ora il caso di una parete piana omogenea e indefinita nelle direzioni y e z e di spessore L , come mostrato precedentemente.



L'equazione di Fourier in regime stazionario, senza generazione di potenza, è:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine ammette in x come integrale la seguente funzione:

$$T = Ax + B \quad \text{con } A, B = \text{costanti.}$$

Vediamo di dimostrare meglio quest'ultima espressione. Consideriamo la solita equazio-

(196)

ne:

$$\frac{c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \delta/k$$

L'integrale generale, nel caso di regime stazionario e distribuzione monodimensionale, è:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{k \nabla^2 T + \delta}{c_p} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \text{se } \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T + \delta/k = 0$$

↓

$$\nabla T = \int -\delta/k dx = -\delta/k x + A$$

Quindi: $T(x) = \int (\delta/k x + A) dx =$

$$= \int \delta/k x dx + \int A dx = \frac{\delta}{2k} x^2 + A \cdot x + B$$

A questo punto visto che non c'è generazione di potenza ($\delta=0$) si ottiene:

$T(x) = Ax + B$ → DISTRIBUZIONE DI TEMPERATURA.

Le costanti A e B si trovano con le condizioni al contorno. Impostiamo ora una condizione sull'equazione del tipo "a temperatura imposta". Abbiamo:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow T(x) = T(0) = T_1 \\ x=L \Rightarrow T(x) = T(L) = T_2 \end{cases}$$

Utilizzando l'integrale generale con queste condizioni si ottiene:

$$\begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = AL + B \end{cases}$$

Quindi:

$$T = T_1 + (AL + B)x = T_1 + (AL + T_1)x$$

Concludendo:

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} \Rightarrow T = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} L + T_1 \right) x \Rightarrow T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

Una volta determinata la distribuzione di temperatura posso determinare il flusso termico anche come:

$$j = -k \frac{dT}{dx} \Rightarrow j = -k \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Impatto: $\frac{dT}{dx} = -\frac{\delta}{k} x + A = A$

Per:

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Nel caso particolare di $T_1 = T_2$, otteniamo:

$$T(x) = T_1 = T_2 \quad \forall x \in [0, L].$$

Calcoliamoci ora il flusso termico specifico:

$$\vec{q} = -k \nabla T = -k \frac{dT}{dx} = +k \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Quindi:

$$\vec{q} = -\delta x + \frac{T_1 - T_2}{L} k = \frac{T_2 - T_1}{L} (-k) \text{ con } \delta = 0$$

Potremo se $T_1 = T_2 \Rightarrow \vec{q}(x) = 0$. Vediamo che mentre $T(x)$ è lineare in x , $|\vec{q}(x)|$ è costante in x . Calcoliamoci ora il flusso termico totale entrante ($\vec{Q}_1$) e uscente ($\vec{Q}_2$) dalla barra:

$$\vec{Q}_1 = \int_{S_1} \vec{q}_1 \cdot \vec{m}_1 dS_1 = -q S_1 = -\frac{k}{L} (T_1 - T_2) S_1$$

$$\vec{Q}_2 = \int_{S_2} \vec{q}_2 \cdot \vec{m}_2 dS_2 = -q S_2 = -\frac{k}{L} (T_1 - T_2) S_2$$



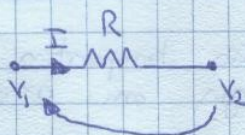
Quindi come si può facilmente notare, la potenza totale o meglio il calore netto scambiato è nullo. Infatti:

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} \cdot \vec{m} dS = \int_{S_1} \vec{q}_1 \cdot \vec{m}_1 dS_1 + \int_{S_2} \vec{q}_2 \cdot \vec{m}_2 dS_2 = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0$$

Potremo la potenza termica è proporzionale al flusso termico grezzo a meno di una costante che è la superficie di scambio S . Vediamo brevemente il significato fisico del segno di q . Supponiamo che $T_1 > T_2$. Abbiamo:

$$\vec{q} = \frac{k}{L} (T_1 - T_2) > 0 \quad \text{e cioè } \vec{q} \text{ è orientato verso } x \text{ crescente.}$$

Questa volta implica che $\vec{Q}_1 < 0$ e $\vec{Q}_2 > 0$ e cioè il calore entra nella superficie ① ed esce dalla superficie ②. Nei casi in cui si ha scambio di calore per conduzione in regime stazionario e senza generazione interna di potenza, si può usare l'analogia del modello elettrico equivalente. Consideriamo in merito la seguente resistenza:



$\Delta V = V_1 - V_2$ e per la legge di Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

Se per analogia consideriamo la temperatura come la tensione, e il flusso termico come la corrente, possiamo scrivere:

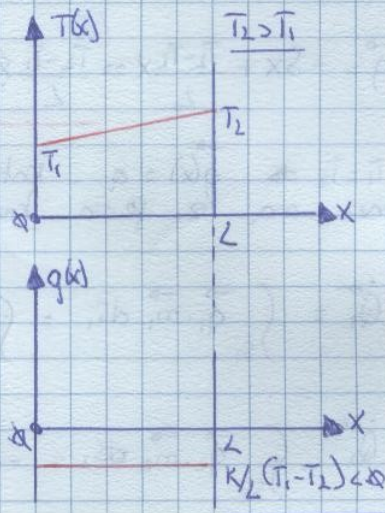
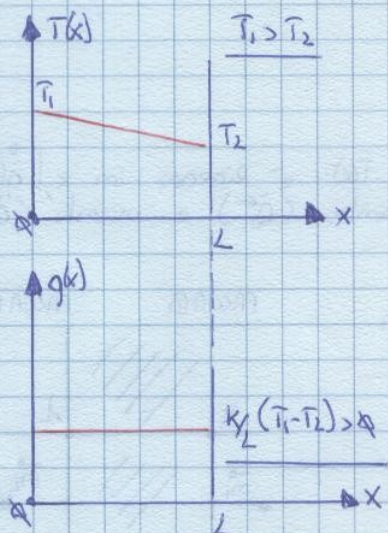
$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \Rightarrow R_T = \frac{T_1 - T_2}{Q}$$

188

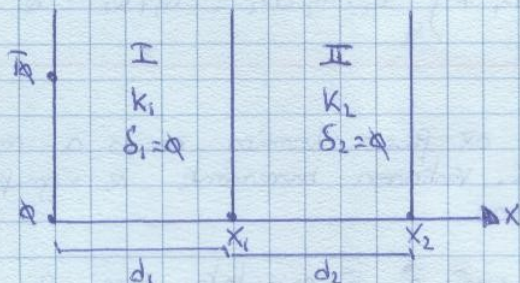
dove R_T è la resistenza termica. Ripetendo l'espressione della potenza termica, abbiamo:

$$\dot{Q} = kS \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \quad \text{con} \quad \underline{R_T = \frac{L}{kS}}$$

Precedentemente abbiamo detto che $T(x)$ è lineare in x mentre $q(x)$ è costante. Vediamo i grafici:



Analizziamo ora il caso particolare in cui ci sono due lastre interfacciate:



Ipotesi che $\underline{T_0 > T_2}$.

Chiaro che se $k_1 = k_2$ mi riduco al caso di una lastra, mentre se $k_1 \neq k_2$, utilizzo le condizioni di raccordo:

$$\begin{cases} T^I(x_1) = T^{II}(x_1) \\ q^I(x_1) = q^{II}(x_1) \end{cases} \Rightarrow \frac{k_1}{d_1} (T_0 - T_1) = \frac{k_2}{d_2} (T_1 - T_2)$$

Si noti che:

$$\begin{cases} \delta_1 = \varphi \\ \delta_2 = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^I = \text{costante} \\ q^{II} = \text{costante} \end{cases}$$

Si noti che se $k_1 > k_2$, la pendenza dei profili della temperatura sarà minore nel tratto I che nel tratto II. Continuando l'analogia con l'equivale elettrico si ha:



I due resistori sono in serie e quindi le resistenze si sommano ottenendo:

$$\underline{R_{eq} = R_{k1} + R_{k2}}$$

Quindi in generale se ho n lastre che si interfacciano tra loro avrà n resistori in serie.

Quindi:

$$R_{eq} = \sum_i R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

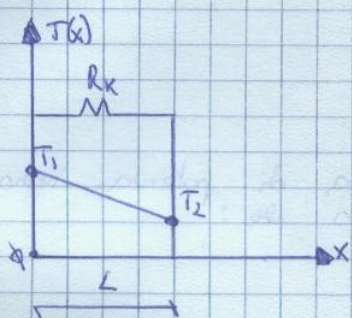
Prendendo:

$$R_{eq} = \frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2} + \dots + \frac{d_n}{k_n} \right)$$

Tornando al caso delle due lastre precedenti si ha:

$$Q = \frac{T_0 - T_1}{R_{K1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{K2}} \Rightarrow R_{K_{TOT}} = R_{K1} + R_{K2} = \frac{(T_0 - T_1) + (T_1 - T_2)}{Q}$$

Vediamo ora un esempio. Supponiamo di voler calcolare il consumo di energia primaria per l'alimentazione di un forno e si vuole limitare il flusso termico medio disperso attraverso le pareti al valore di $q, W/cm^2$. Vogliamo calcolare lo spessore della parete nel caso in cui la conduttività termica della stessa sia $k=1,1$ e le temperature sulle facce interna ed esterna rischiamo rispettivamente pari a $1100 K$ e $350 K$. Abbiamo:



$$j = \frac{T_1 - T_2}{L/k} \Rightarrow L = k \frac{T_1 - T_2}{j} = 0,825 m.$$

Torniamo ora ad analizzare la lastra piana e indefinita con $T_1 = T_2$, ma questa volta ipotizziamo che ci sia generazione di potenza ($S \neq 0$). Abbiamo:

$$T(x) = -\frac{S}{2k} x^2 + Ax + B$$

$$\text{con } \begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = T_1 - \frac{S}{2k} L^2 + A \cdot L \end{cases}$$

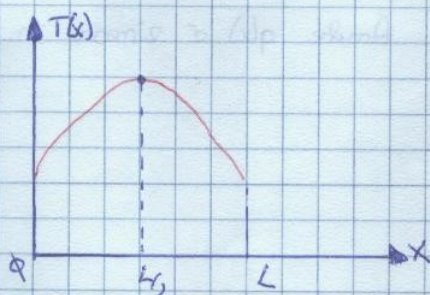
$$\frac{dT}{dx} = -\frac{S}{k} x + A$$

Quindi: $T(x) = \left(T_1 + \frac{SL}{2k} x - \frac{S}{2k} x^2 \right)$ cioè $T(x)$ è una parabola in x con concavità verso il basso.

$$\text{Analogamente: } \vec{q}(x) = \left(Sx - \frac{SL}{2} \right) \vec{i}$$

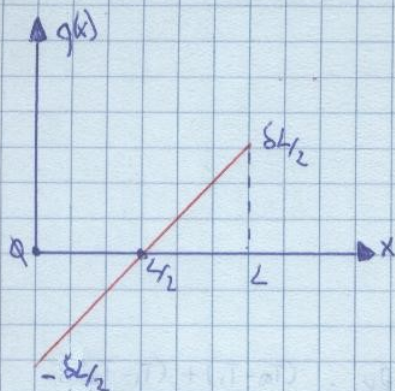
NB: $\vec{i}$ = versore asse x .

Graficamente si ha:



Si noti che tale parabola ha un massimo per $x = L/2$. Inoltre la retta $q(x)$ si annulla in tale punto.

(119)



Si noti che per $q(x) > 0$ esso è crescente con $\vec{i}$ per $\frac{L}{2} < x < L$ mentre per $q(x) < 0$ esso è discendente ad $\vec{i}$ per $0 < x < \frac{L}{2}$.

Si noti che $q(x)$ è lineare in x .

Si noti che quando $\delta \neq 0$ non ha senso parlare di schematizzazione elettrica equivalente. Anche in questo caso si ha:

$$\vec{Q}_1 = \int_{S_1} \vec{q}_1 \cdot \vec{m}_1 dS_1 = \int_{S_1} \left(+\frac{\delta L}{2} \right) dS_1 = \frac{\delta L}{2} S_1 > 0$$

$$\vec{Q}_2 = \int_{S_2} \vec{q}_2 \cdot \vec{m}_2 dS_2 = \int_{S_2} \frac{\delta L}{2} dS_2 = \frac{\delta L}{2} S_2 > 0 \quad \text{con } S_1 = S_2 = S$$

Quindi:

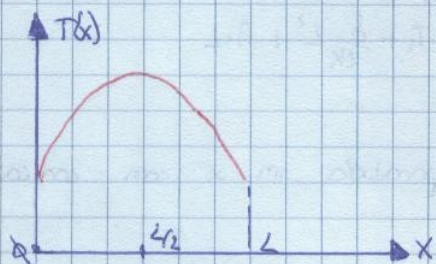
$$\vec{Q} = \oint \vec{q} \cdot \vec{m} dS = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \delta dS > 0$$

In questo caso $\vec{Q} > 0$ perché c'è generazione interna di potenza. Vediamo ora il caso più generale in cui $T_1 \neq T_2$ e $\delta \neq 0$. Otteniamo che:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{L} + \frac{\delta L}{2k} x - \frac{\delta}{2k} x^2$$

$$\vec{q}(x) = \delta x - \frac{\delta L}{2} + \frac{k}{L} (T_1 - T_2)$$

Qui $T(x)$ è lineare in δ . Graficamente si ha:



Anche $q(x)$ è lineare in x .

FASCIO DI RETTE.