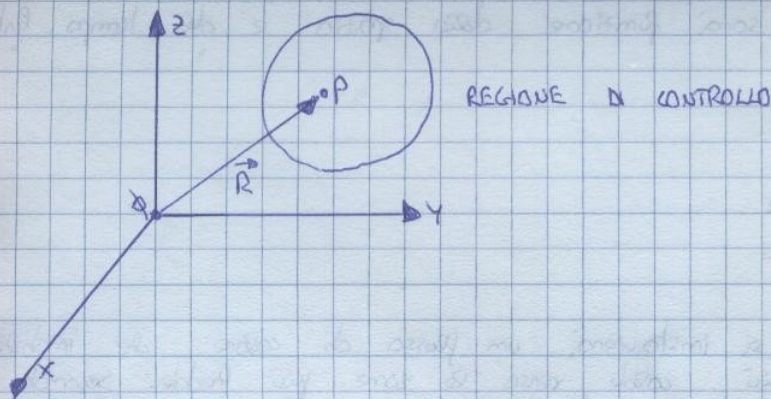


96

Iniziamo ora a parlare della trasmissione di calore. Iniziamo quindi ad entrare nella seconda parte del corso. In particolare ci occupiamo dello scambio di energia sotto forma di calore. Abbiamo già visto che il calore (Q) e le variazioni (Δ) sono forme di scambio di energia sia per i sistemi chiusi che per quelli aperti. Quando l'energia scambiata avviene tramite il calore, essa viene anche chiamata **energia termica**. Esistono sostanzialmente tre modi per trasmettere il calore:

- 1) **conduzione**: in cui lo scambio di energia avviene per diffusione a livello atomico-molecolare. In sostanza quando vibra maggiormente un atomo, per agitazione termica esso ecciterà gli atomi ad esso vicini, trasferendo a loro parte della sua energia. Quindi si ottiene la trasmissione di energia termica all'interno di mezzi materiali senza trasportare materia. Ovviamente in assenza di mezzi materiali non si può avere la conduzione. Questo metodo è tanto più efficace quanto più buona è la struttura cristallina del materiale.
- 2) **convezione**: in cui lo scambio di energia avviene attraverso un moto organizzato di materia che trasporta a sua volta l'energia. Quindi la trasmissione di energia termica all'interno dei mezzi materiali avviene tramite il trasporto di materia. In assenza dei mezzi materiali non si può avere la convezione. Questo metodo è più efficace nel caso di liquidi e gas ed è sempre accompagnato da una frazione di scambio conduttivo. Ovviamente parleremo di convezione quando la frazione conduttiva sarà trascurabile rispetto alla frazione convettiva.
- 3) **irraggiamento**: in cui non è necessaria la presenza di un mezzo materiale che supporti lo scambio in quanto l'energia si propaga tramite onde elettromagnetiche.

Facciamo subito delle osservazioni. Innanzitutto i materiali che possiedono una struttura cristallina, come per esempio i metalli, hanno una conduttività maggiore dei materiali che non l'hanno. Questo fatto accade perché qualsiasi oscillazione si propaga con facilità lungo un reticolo cristallino. Quindi se la struttura è ordinata la conduzione è migliore. Anche la convezione, quando non viene trasportata la materia, può essere vista come una conduzione. E' anche possibile avere una conduzione pura ma non una convezione pura. Quando esiste la convezione esiste sempre anche la conduzione. Si noti inoltre che mentre nei gas e nei liquidi sono presenti contemporaneamente sia la conduzione sia la convezione, nei solidi non si può avere la convezione ma si può soltanto avere la conduzione. Iniziamo ora a parlare della conduzione. Abbiamo già visto che la conduzione è quel processo di trasmissione del calore senza movimento di materia che si realizza in un mezzo solido, liquido, o gassoso dalle zone a temperatura maggiore verso le zone a temperatura minore. Quindi la conduzione si manifesta in presenza di differenze di temperatura tra i diversi punti di un mezzo. Si consideri ora un mezzo omogeneo e isotropo sede di trasmissione di calore per conduzione. Esso può essere descritto brevemente in questo modo:



Chiamiamo **volume di controllo** il volume di tale mezzo, e **superficie di controllo** la sua superficie. Il vettore $\vec{R}$ prende il nome di **vettore posizione**. Definiamo **campo di temperatura** quel campo scalare, indicato con $\tilde{T}$ che attribuisce una temperatura T ad ogni punto della regione di controllo (del mezzo). Tale campo è funzione del vettore $\vec{R}$ e del tempo t . Quindi si scrive:

$$\tilde{T}(\vec{R}, t)$$

Questa funzione $\tilde{T}$ deve essere continua nello spazio e nel tempo e pertanto la regione di controllo non deve possedere dei "buchi spaziali" nel senso che non deve possedere degli spazi vuoti. Questa ipotesi di lavoro va sotto il nome di **ipotesi di continuità**. Inoltre ogni punto della regione di controllo si trova in stato di equilibrio stabile. Chiamiamo **superficie isoterma** una superficie costituita da infiniti punti tutti alla stessa temperatura. Quindi finalmente si scrive:

$$\tilde{T}(\vec{R}, t) = \text{costante}$$

Una **superficie isoterma stazionaria** è una superficie isoterma che non varia al variare del tempo. Quindi si ha:

$$\tilde{T}(\vec{R}, t) = \text{costante} \Rightarrow \tilde{T}(\vec{R}, t_1) = \tilde{T}(\vec{R}, t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in t$$

Tagliando con un piano Σ una superficie isoterma si ottengono tante **linee isoterme**, le quali non si possono mai incrociare. Supponiamo infatti per assurdo che due isoterme si incontrino nel punto P:



Questo significa che nel punto P sono definite due differenti temperature. Chiameremo **in caso** è assurdo.

Al campo scalare della temperatura si può associare il campo vettoriale del gradiente di temperatura, il quale esprime la variabilità della temperatura nell'intorno di un punto. Si ricordi che il gradiente è quell'operatore matematico che applicato ad una grandezza scalare, produce una grandezza vettoriale. Per definizione si ha:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{dove } p = p(x, y, z)$$

(93)

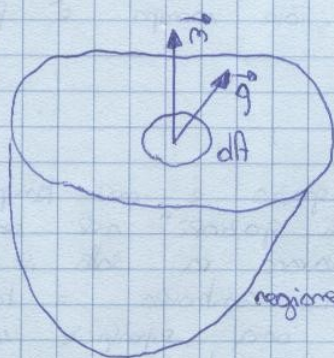
chiaramente anche il vettore gradiente sarà funzione dello spazio e del tempo. Entanto:

$$\text{grad } T = P(R, t)$$

dove:

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{U}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{U}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{U}_z$$

Se la temperatura non è uniforme si instaurerà un flusso di calore che imporrà, ma con $\vec{J}$ diretto dalle zone più calde verso le zone più fredde. Secondo l'ipotesi di Fourier, la causa del trasporto di calore è dovuta alla differenza di temperatura tra due punti e consiste nell'ammettere una proporzionalità tra la causa e l'effetto prodotto ($\vec{J}$). Si noti che $\vec{J}$, in questo caso, prende il nome di **flusso termico vettoriale**. Consideriamo un punto P e un'area infinitesima dA :



$\vec{n}$ è il vettore normale alla superficie,
e $\vec{q}$ è il flusso di calore.

regione di controllo

Il flusso termico vettoriale $\vec{J}$ rappresenta il calore che fluisce, nelle unità di tempo, attraverso la superficie unitaria normale alla direzione di propagazione. Esso si misura in Watt/m^2 .

Detto ciò, si può scrivere in termini vettoriali l'ipotesi di Fourier in questo modo:

$$\vec{J} = -k \text{grad } T$$

dove k è una costante che prende il nome di **conduttività termica** del mezzo materiale in cui avviene il trasporto. Il segno meno specifica il verso del flusso. In breve l'energia termica si trasferisce nel verso della temperatura decrescente. Quindi possiamo anche dire che $\text{grad } T$ mi rappresenta la variabilità della temperatura nell'intorno di un punto. Quindi l'ipotesi di Fourier rappresenta l'equazione costitutiva del mezzo. Se il trasporto di calore ha luogo lungo una sola direzione si può scrivere:

$$|\vec{J}| = -k \frac{dT}{dn} \quad (\text{forma scalare dell'ipotesi di Fourier}).$$

Quindi introducendo l'ipotesi di Fourier, abbiamo introdotto la grandezza k . Formalmente:

$$k = \frac{-\vec{J}}{\text{grad } T}$$

In generale la conduttività termica dei solidi è maggiore della conduttività termica dei liquidi e a sua volta è maggiore di quella dei gas. Si noti inoltre che

La conduttività termica, k di un mezzo dipende solo dalla stato termodinamico del mezzo stesso e quindi si può scrivere:

$$k = k(T, P).$$

k però dipende anche dalla direzione secondo cui si applica il gradiente di temperatura e dal punto materiale in cui si valuta la conduttività stessa. Indichiamo con:

$$\vec{q} = \frac{dQ}{dA dt} \quad \text{con} \quad dA = dA \cdot \vec{n}$$

il **flusso termico specifico** che mi rappresenta il calore che fluisce attraverso la superficie dA nell'unità di tempo. Essa è un vettore e si misura in Watt/m^2 . Tale flusso è funzione di $\vec{n}$ e t :

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{n}, t)$$

Chiamiamo invece **linee di flusso** quelle linee tangenti al vettore $\vec{q}$ in ogni punto. Graficamente si ha:



Consideriamo ora un filo di rame. Quando esso viene attraversato dalla corrente elettrica, dissipa potenza elettrica e genera potenza termica. Chiamiamo **intensità di generazione di potenza** la seguente espressione:

$$S = \frac{d^2 E_p}{dV dt}$$

Essa mi fornisce l'energia prodotta nell'unità di volume e di tempo. L'unità di misura di tale intensità è Watt/m^3 . E_p mi rappresenta **l'energia prodotta** e $d^2 E_p$ è sostanzialmente un infinitesimo del quanto totale. Si noti che questa energia è in realtà una quantità fittizia che usiamo per tenere conto dell'energia termica derivante da trasformazioni energetiche. Si pensi per esempio ad un filo elettrico in cui la corrente trasportata permette allo stesso di dissipare calore. Noi ipotizziamo che il calore dissipato sia in qualche modo prodotto. Vediamo ora le caratteristiche di S . Innanzitutto essa è una grandezza scalare, e si misura in Watt/m^3 . Consideriamo ora il seguente sistema chiuso:



Principio è postulato di Fourier a una statement incompleta per la soluzione di un problema di conduzione. Però, partendo da questo postulato, posso dedurre un'equazione fenomenologica. La cosa si intende per equazione fenomenologica? Una equazione fenomenologica altro non è che una legge che rispetta i seguenti quattro requisiti:

- 1) IPOTESI DETERMINISTICA, cioè il futuro non può alterare il passato.
- 2) AZIONE LOCALE, cioè ogni punto può ricevere azione solo dai punti che lo circondano.
- 3) INVARIANZA, nel senso che tale equazione è invariante rispetto al sistema di riferimento.
- 4) DISUGUAGLIANZA, cioè tale equazione rispetta la disuguaglianza entropica (Secondo).

Quindi tornando a noi e' equazione fenomenologica che deduciamo dal postulato di Fourier viene detta equazione di Fourier. Essa esprime un bilancio energetico di un sistema sede di trasmissione di calore per conduzione. Tale bilancio può essere applicato ad un generico volume di controllo oppure ad un volume infinitesimo all'interno del mezzo. Ipottizziamo che il mezzo sia costituito da un solido solido con un sistema di riferimento inerziale e con proprietà termofisiche ben definite e indipendenti dal tempo, che le variazioni di volume a seguito delle variazioni di temperatura siano nulle, e che la potenza generata all'interno del mezzo sia descrivibile con una funzione del tipo $\delta = \delta(x)$. Possiamo allora scrivere il bilancio energetico per il sistema di prima in questo modo:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}^* + \dot{E}_p$$

Siccome possiamo scrivere il flusso termico anche in questo modo:

$$\vec{q} = \frac{d^3Q}{dA dt}$$

abbiamo che: $\vec{q} dA = \frac{d^3Q}{dA dt} dA \Rightarrow \vec{q} dA = \frac{d^3Q}{dt} = d^2\dot{Q}$

Quindi: $\dot{Q}^* = \frac{dQ}{dt} = \int_{cs} d^2\dot{Q}$

con: $\begin{cases} V_c = \text{volume di controllo} \\ S_c = \text{superficie di controllo} \end{cases}$

Analogamente: $\dot{E}_p = \frac{dE_p}{dt} = \int_{V_c} \delta dV$ visto che: $\delta = \frac{d^3E_p}{dV dt}$

Se indichiamo con e l'energia specifica massica, abbiamo che:

$$dE = e \cdot dm \Rightarrow E = \int dE = \int e dm = \int_{V_c} e \rho dV$$

visto che: $\rho = \frac{dm}{dV}$. Ricordandosi che:

$$e = u + e_k + e_p$$



$$E = \int_{\mathcal{V}} u \rho dV$$

Infatti supponiamo che il sistema compressibile sia in quiete ($\mathbf{v}_c = 0$) e si possa trascurare l'energia ep. Quindi:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} u \rho dV \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u \rho dV = - \int_{\mathcal{S}} \vec{q} \cdot \vec{n} dA + \int_{\mathcal{V}} \delta dV$$

Ma se il volume del sistema non varia nel tempo si ha:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d}{dt} (u \rho) dV = \int_{\mathcal{V}} \left(\rho \frac{du}{dt} + u \frac{d\rho}{dt} \right) dV = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{du}{dt} dV$$

Simili che $\frac{d\rho}{dt} = 0$ in quanto si conserva la massa e il volume totale del sistema. Ha:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \frac{du}{dt} dV = \int_{\mathcal{V}} \rho \left(\frac{du}{dt} \right) dV = \int_{\mathcal{V}} \rho \left(\frac{du}{dT} \right) \frac{dT}{dt} dV$$

Si ricordi poi che in un sistema semplice e monocomponente ho due gradi di libertà nelle descrizioni intensive. Quindi si ha:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{d}{dt} u(T, v) = \rho \frac{d}{dt} u(T) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{dt} = \rho c_v \frac{dT}{dt}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{dt} dV = \int_{\mathcal{V}} \rho c_v \frac{dT}{dt} dV$$

Alla fine possiamo riscrivere il bilancio nella seguente maniera:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_v \frac{dT}{dt} dV + \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA - \int_{\mathcal{V}} \delta dV = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\rho c_v \frac{dT}{dt} - \delta \right) dV + \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA = 0$$

Ritorniamo ora alle importanti teoremi dell'analisi matematica, e cioè:

$$1) \int_{\mathcal{Z}} \vec{q} \cdot \vec{n} d\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \quad \rightarrow \text{teorema di Gauss}$$

$$2) \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \text{Div } \vec{q} = \left(\vec{i} \frac{\partial q}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial q}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial q}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad \rightarrow \text{teorema della divergenza}$$

abbiamo:

$$\int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \Rightarrow \int_{\mathcal{V}} \left(\rho c_v \frac{dT}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right) dV$$