

Purtroppo il ciclo di Carnot non può essere realizzato in una macchina termica in quanto è composto da trasformazioni reversibili, e quindi per definizione è lento. Infatti nelle macchine termiche industriali non solo dobbiamo ottenere un buon rendimento, ma anche una notevole velocità di trasformazione del calore in lavoro. Quindi saranno altri cicli tecnici. I cicli che vedremo sono raggruppati in due categorie:

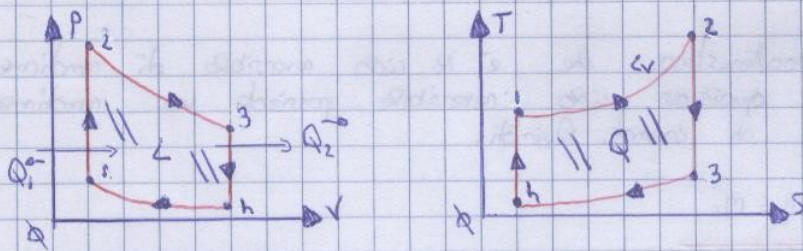
1) cicli a gas.

2) cicli a vapore.

Nei cicli a gas il fluido operante è gas, mentre nei cicli a vapore il fluido operante è vapore. Consideriamo prima i cicli a gas. Partiamo dal ciclo Otto. Consideriamo in merito di avere una miscela di aria e benzina in un cilindro, nello stato fisico 1. Se ad un certo punto una scintilla accende la miscela, si avrà un'espansione e quindi si produrrà un riscaldamento a volume costante e la pressione salirà fino al valore  $P_2$ . Quindi durante la trasformazione  $1 \rightarrow 2$ , la miscela assorbirà la seguente quantità di calore:

$$Q_1^+ = \nu R (T_2 - T_1)$$

Graficamente si ha:



Giunti nello stato 2, il gas si espanderà adiabaticamente spingendo il pistone fino allo stato 3 dove finisce la sua corsa. A questo punto si apre la valvola di scarico, e il gas fuoriesce dal cilindro mentre la pressione scende al valore della pressione atmosferica ( $P_{atm}$ ). Cinge quest'ultima trasformazione viene ceduta la quantità di calore  $Q_2^-$ :

$$Q_2^- = \nu R (T_3 - T_4)$$

Giunti nello stato 4, viene immessa nel cilindro di nuovo la miscela aria-benzina attraverso la valvola di aspirazione, e si ferma quindi nello stato 1. Il ciclo Otto è quindi composto da due trasformazioni isentropiche reversibili e da due trasformazioni isocore reversibili. In particolare:

1)  $1 \rightarrow 2$  è un riscaldamento isocorico e quindi possiamo scrivere:

$$S_2 - S_1 = m (\nu R \ln T_2/T_1 + R \ln V_2/V_1)$$

$$\text{Siccome } V_2 = V_1 \Rightarrow S_2 - S_1 = m \nu R \ln T_2/T_1 \quad (\ln V_2/V_1 = 0)$$

2)  $2 \rightarrow 3$  è una espansione isentropica.



- 3) 3 → 4 è un raffreddamento isocoro
- 4) 4 → 1 è una compressione isentropica

Possiamo quindi scrivere il rendimento del ciclo Otto in questa modo:

$$\eta_o = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{c_v(T_2 - T_1) - c_v(T_3 - T_4)}{c_v(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_3(1 - T_4/T_3)}{T_2(1 - T_1/T_2)}$$

Chiamiamo rapporto di compressione la seguente espressione:

$$R = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_{MAX}}{V_{MIN}}$$

Nelle trasformazioni adiabatiche si ha che:

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Siccome per  $V_3 = V_4$  e  $V_2 = V_1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4} \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$

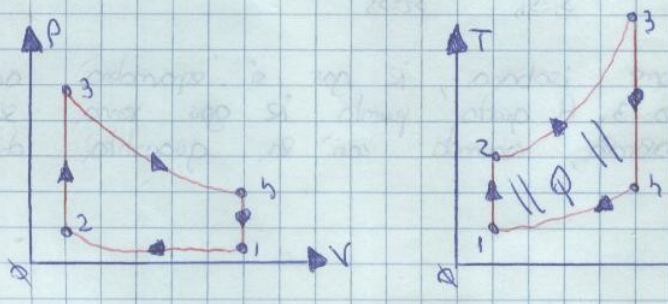
Quindi il rendimento del ciclo diventa:

$$\eta_o = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{R^{\gamma-1}}$$

Però il rendimento del ciclo Otto cresce con il crescere del rapporto di compressione. Si noti che anche il ciclo di Otto è reversibile e simmetrico, ma è tale che:

$$\eta_o \leq \eta_c$$

in quanto il ciclo di Carnot è il ciclo reversibile di rendimento massimo. Vediamone un esempio. Supponiamo di avere un ciclo Otto ideale che ha un rapporto di compressione volumetrico pari a 10 e la massa di aria presente nel motore è pari a 0,2 kg. All'inizio della fase di compressione l'aria si trova ad una temperatura di 20°C e alla pressione di 1 bar. Durante il riscaldamento isocoro viene fornito al gas una quantità di calore pari a 4 kJ. Determinare il rendimento del ciclo, le variazioni di temperatura dei punti caratteristici del ciclo e la cilindrata del motore. Rischiamo per comodità il ciclo ideale di Otto:





Le trasformazioni  $1 \rightarrow 2$  e  $3 \rightarrow 4$  sono isentropiche e adiabatiche e quindi:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{1}{R}\right)^{\gamma-1} = 736,4 \text{ K}$$

Durante il riscaldamento isocoro (trasformazione  $2 \rightarrow 3$ ) si ha:

$$Q^+ = m c_v (T_3 - T_2) \Rightarrow T_3 = T_2 + \frac{Q^+}{m c_v} \quad \text{con } c_v = \frac{5}{2} R \quad \text{perché l'aria è un gas perfetto biatomico.}$$

Si come il ciclo Otto è simmetrico si ha:

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4 \Rightarrow T_4 = \frac{T_3 T_1}{T_2} = 848,6 \text{ K.}$$

Per definizione poi la cilindrata del motore è:

$$\text{CILINDRATA} = V_1 - V_2$$

Quindi:  $\text{CILINDRATA} = V_1 \left(1 - \frac{1}{R}\right)$  e  $V_1 = \frac{m R T_1}{P_1} = \dots = 0,00336$  con  $R^* = \frac{R}{M} = \frac{8314}{29 \text{ kg/kmol}}$

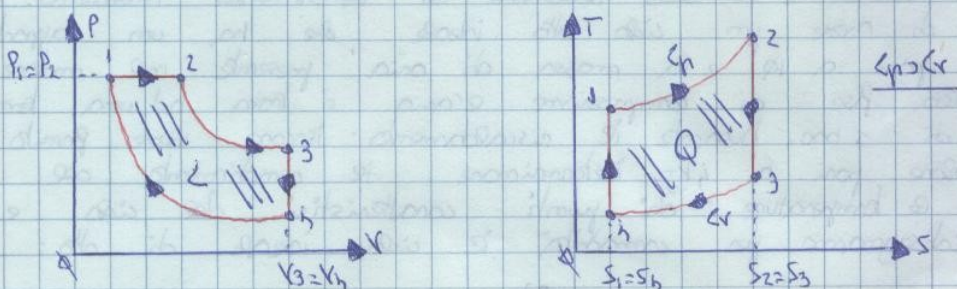
Pertanto:

$$\text{CILINDRATA} = 0,003 \text{ m}^3. \quad \text{Impieghi: } \eta_{jo} = 1 - \frac{1}{R^{\gamma-1}} = 0,6$$

Parliamo ora del **ciclo diesel** il quale viene realizzato nei motori ad accensione per compressione. Esso differisce dal ciclo Otto nel fatto che il calore  $Q_1^+$  viene introdotto nel cilindro a pressione costante invece che a volume costante. Supponiamo per esempio di avere un cilindro al cui interno vi è un volume  $V_1$  di aria compressa alla pressione  $P_1$  e alla temperatura  $T_1$ . Se ora immettiamo una certa quantità di olio combustibile questo a contatto con l'aria si accende e brucia generando la quantità di calore:

$$Q_1^+ = c_p (T_2 - T_1)$$

Quindi graficamente si avrà:



Giunti nello stato 2 dopo l'espansione isobara, il gas si espanderà ancora fino al volume  $V_3$  giungendo nello stato 3. A questo punto il gas verrà scaricato verso l'esterno, attraverso una valvola, cedendo così la quantità di calore:

$$Q_2^- = c_v (T_3 - T_4).$$

Giunti nello stato 4 verrà inserita nel cilindro una nuova quantità d'aria, ottenendo una nuova compressione adiabatica.



Quindi il ciclo diesel consta di una trasformazione che è un riscaldamento a pressione costante (1→2), una espansione isentropica (2→3), un raffreddamento a volume costante (3→4), ed infine una compressione isentropica (4→1). Si noti che per un gas ideale se isocore hanno una pendenza minore delle isobore in quanto  $\gamma > \gamma$ . In questo caso il rapporto di compressione è:

$$r = \frac{V_4}{V_1}$$

Chiamiamo invece **rapporto di combustione** la seguente espressione:

$$b = \frac{V_3}{V_2}$$

Si noti che il ciclo diesel è reversibile ma non è simmetrico. Valutiamo ora il rendimento di tale ciclo:

$$\eta_D = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V(T_3 - T_4)}{C_V(T_2 - T_1)}$$

Con un procedimento analogo a quello visto per il ciclo Otto si ottiene:

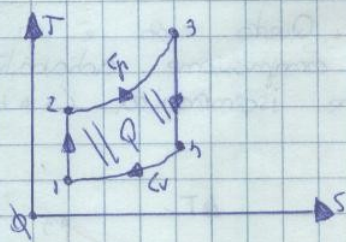
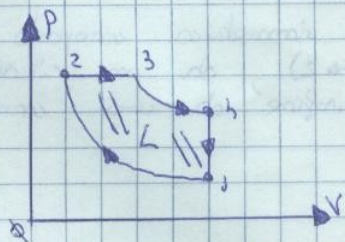
$$\eta_D = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \left( \frac{b^k - 1}{k(b-1)} \right)$$

NB:  $C \in R$ .

Come si può facilmente notare, il rendimento del ciclo diesel differisce da quello del ciclo Otto per le sole lettere in parentesi. Tale termine è sempre maggiore di uno. Da questo si deduce che il rendimento del ciclo Otto a parità del rapporto di compressione, è maggiore del rendimento del ciclo diesel. Quindi:

$$\eta_{D \text{ GAS IDEALE}} > \eta_{O \text{ GAS IDEALE}}$$

Vediamo un esempio. Consideriamo un ciclo diesel ideale ad aria che ha un rapporto di compressione volumetrico pari a 20 ed un rapporto di combustione pari a 2. All'inizio della fase di compressione isentropica il gas ha una pressione di 1 bar, e una temperatura di 15°C ed occupa un volume di 2000 cm<sup>3</sup>. Vogliamo determinare la temperatura e la pressione in ogni stato del ciclo, il lavoro netto prodotto e il rendimento termodinamico. Richiediamo per comodità il ciclo:



L'aria è un gas perfetto biatomico con:  $C_V = \frac{5}{2}R^*$  e  $R^* = \frac{R}{M}$  con  $M = 29 \text{ kg/kmol}$   
 $C_P = \frac{7}{2}R^*$



84

Calcoliamo la massa  $m$  di aria:

$$m = \frac{P_1 V_1}{R^* T_1} = 0,222 \text{ kg}$$

A questo punto:

$$1 \rightarrow 2 \text{ \u00e8 adiabatica isentropica} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Siccome:  $R = \frac{V_1}{V_2} = 20 \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{R}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 955,16 \text{ K}$

Quindi nello stato 2 la pressione sar\u00e0:

$$P_2 = \frac{R^* T_2}{V_2} = 66,26 \text{ bar}$$

Nello stato 3 si ha:

$$P_2 = P_3 \text{ poich\u00e9 la trasformazione } 2 \rightarrow 3 \text{ \u00e8 isobara.}$$

Quindi:

$$\frac{V_3}{V_2} = b = 2 \Rightarrow V_3 = 2V_2 \text{ con } V_2 = \frac{V_1}{20}$$

Pertanto:  $\begin{cases} V_2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \\ V_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \end{cases} \Rightarrow T_3 = \frac{P_2 V_3}{R^*} = \frac{P_2 V_2}{R^*} = \frac{66,26 \text{ bar} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{8314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}} = 1910 \text{ K}$

Infine per lo stato 4 si ha:

$$3 \rightarrow 4 \text{ \u00e8 una isentropica} \Rightarrow \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_4 = T_3 \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 760,38 \text{ K}$$

Infatti  $V_1 = V_4$  (isocora). Conclusione:

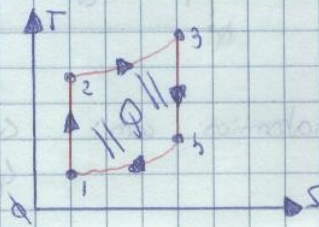
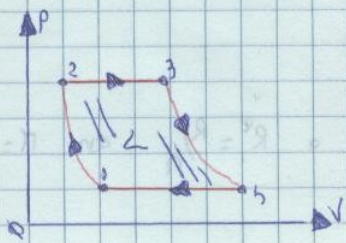
$$P_4 = \frac{R^* T_4}{V_4} = \frac{R^* T_4}{V_1} = 2,638 \text{ bar}$$

Analizziamo ora il rendimento:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1 - \frac{1}{\gamma^{\gamma-1}} \left(\frac{b^\gamma - 1}{\gamma(b-1)}\right) = 1 - \frac{1}{R^{\gamma-1}} \left(\frac{b^\gamma - 1}{\gamma(b-1)}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{20^{\gamma-1}} \left(\frac{2^\gamma - 1}{\gamma(2-1)}\right) = 1 - \frac{1}{20^{\gamma-1}} \left(\frac{2^\gamma - 1}{\gamma}\right) = \dots = 0,6168 \end{aligned}$$

Si noti che  $k = \frac{7/2 R^*}{5/2 R^*} = \frac{7/2}{5/2} = 7/5 = 1,4$ . Infine:  $L^+ = Q^+ - Q^- = m c_p (T_3 - T_2) - m c_v (T_4 - T_1)$

Poniamo ora due cicli di gas. Questo ciclo \u00e8 un ciclo simmetrico composto da una trasformazione 1 \u2192 2 \u00e8 una compressione adiabatica, da un riscaldamento isoboro (2 \u2192 3), da un'espansione isentropica (3 \u2192 4), e infine da una compressione isocora (4 \u2192 1). Graficamente si ha:





Il rendimento del ciclo di Joule è:

$$\eta_J = \frac{Q_{23}^{\leftarrow} - Q_{31}^{\rightarrow}}{Q_{23}^{\leftarrow}}$$

Si come per: 
$$\begin{cases} Q_{31}^{\rightarrow} = (H_3 - H_1) = m(h_3 - h_1) \\ Q_{23}^{\leftarrow} = (H_3 - H_2) = m(h_3 - h_2) \end{cases}$$

$$\eta_J = \left(1 - \frac{H_3 - H_1}{H_3 - H_2}\right) = \left(1 - \frac{m(h_3 - h_1)}{m(h_3 - h_2)}\right) = \left(1 - \frac{h_3 - h_1}{h_3 - h_2}\right)$$

Se il fluido operante è un gas ideale si ha:

$$\eta_J = \left(1 - \frac{h_3 - h_1}{h_3 - h_2}\right) = \left(1 - \frac{c_p(T_3 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)}\right) = \left(1 - \frac{T_3 - T_1}{T_3 - T_2}\right) = \left(1 - \frac{T_1(T_3/T_1 - 1)}{T_2(T_3/T_2 - 1)}\right) = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \eta_0$$

Si noti che il ciclo di Joule è globalmente irreversibile. Si ha questa perdita durante lo svolgimento dei processi isobari, la massima scambio calore è attraverso infinitesime temperature diverse, e quindi non potrà mai essere all'equilibrio termico con le sorgenti di calore, giacché di queste, ce ne sono sempre un numero finito. Definiamo **rapporto di compressione**, che indichiamo con  $\beta$ , la seguente espressione:

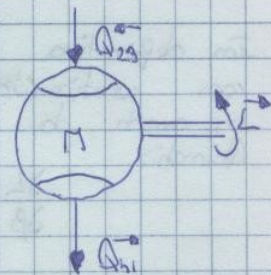
$$\beta = \frac{P_{MAX}}{P_{MIN}} = \frac{P_2}{P_1}$$

Un altro parametro importante in questo ciclo è il lavoro che viene prodotto per ogni ciclo effettuato, e che ora andiamo a valutare:

$$L^{\rightarrow} = Q_{23}^{\leftarrow} - Q_{31}^{\rightarrow} = m(h_3 - h_2) - m(h_3 - h_1)$$

Se il fluido è un gas perfetto si ha:

$$\begin{aligned} L^{\rightarrow} &= m c_p (T_3 - T_2) - m c_p (T_3 - T_1) = m c_p (T_3 - T_2 - T_3 + T_1) = \\ &= \tilde{L}(T_1, T_2, T_3, T_1, m, c_p) \end{aligned}$$



Supponiamo ora che  $\begin{cases} T_1 = T_{MIN} \\ T_3 = T_{MAX} \end{cases}$  e  $c_p$  e  $m$  siano fissati.

Possiamo scrivere:

$$L = \tilde{L}(T_2, T_1)$$

Attenzione però che non sappiamo ancora se queste due temperature sono indipendenti tra loro. Suiamo:

$$L^{\rightarrow} = m c_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1} + 1 \right) = m c_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} - \beta - \frac{T_3}{T_1} + 1 \right)$$



82

da:  $\phi = \frac{R}{C_p} = \left(1 - \frac{C_r}{C_p}\right) = \left(1 - \frac{1}{K}\right) = \left(\frac{K-1}{K}\right) \Rightarrow \underline{m_s = (1 - \beta^{-\phi})}$

Impatti:

$\frac{T_2}{T_1} = e^{-\frac{s-s_0}{C_p} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{R}{C_p}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \beta^{\frac{R}{C_p}} = \beta^{\phi}$  (per i gas ideali).

Quindi possiamo scrivere:

$L^0 = m C_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} - \beta^{\phi} - \frac{T_3}{T_1} \beta^{\phi} + 1 \right) = m C_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} - \beta^{\phi} - \frac{T_1}{T_2} \frac{T_3}{T_1} + 1 \right) =$   
 $= m C_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} - \beta^{\phi} - \frac{T_3}{T_1} \beta^{-\phi} + 1 \right) \Rightarrow \underline{L^0 = \tilde{L}(T_1, T_3, \beta, \phi)}$

Quindi  $\beta$  è l'unica variabile di cui il lavoro sia funzione, in quanto  $T_1, T_3, \phi$  sono fissati. In particolare si sa che il lavoro che stiamo cercando è appunto l'area del ciclo e quindi:

$\left(\frac{P_2 \text{ MIN}}{P_1}\right) = \left(\frac{P_1}{P_1}\right) = 1 \leq \beta \leq \left(\frac{P_2 \text{ MAX}}{P_1}\right) = \left(\frac{T_2 \text{ MAX}}{T_1}\right)$  ( $\beta_{\text{MIN}} \leq \beta \leq \beta_{\text{MAX}}$ ).

Entanto si presentano due casi:

1)  $\beta = \beta_{\text{MIN}} = 1 \Rightarrow$  il ciclo si riduce ad un'ombra e viene svolta stessa isoba. n. L'area del ciclo è chiaramente nulla e pertanto il lavoro  $L^0 = 0$ .

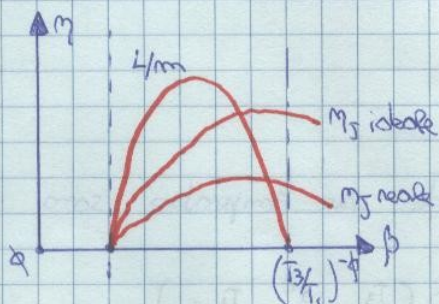
2)  $\beta = \beta_{\text{MAX}} \Rightarrow$  si ha che  $P_2 = P_2 \text{ MAX}$  ( $T_2 = T_3$ ) e il ciclo si riduce ad un segmento verticale. Anche in questo caso l'area e di conseguenza il lavoro del ciclo sono nulli.

In definitiva l'area del ciclo, come il lavoro, è una funzione che varia con continuità al variare di  $\beta$  (o di  $P_2$ ), ed è sia definita positiva, sia è posta in modo da avere due zeri. Questo significa che la stessa presenza un massimo.

Quindi:

$\frac{dL}{d\beta} = m C_p T_1 \left( -\phi \beta^{\phi-1} - \frac{T_3}{T_1} (-\phi \beta^{-\phi-1}) \right) = 0 \Rightarrow \underline{T_2 = T_3}$

Entanto il lavoro massimo prodotto dal ciclo si ha quando  $T_2 = T_3$ . Partiamo ora su un grafico contemporaneamente sia  $\eta$ , sia il lavoro per ciclo specifico ( $L/m$ ) in funzione di  $\beta$ :



Si osserva che non è possibile massimizzare contemporaneamente sia il lavoro per ciclo che il rendimento della macchina.