$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{\vec{dS_1} \times \vec{U_R}}{R^2} \rightarrow \phi_{1,2} = \int_{\Sigma} \left(\oint \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{\vec{dS_1} \times \vec{U_R}}{R^2} \right) \vec{U_n} \, d\Sigma_2 .$$

Σ_2 è la superficie che si appoggia sul secondo circuito, R è la distanza dell'elemento dS_1 del primo circuito. Quindi si può scrivere:

$$\phi_{1,2} = M_{1,2} \, i_1$$

Analogamente:

$$\phi_{2,1} = M_{2,1} \, i_2$$

Dimostreremo più avanti che $M_{1,2} = M_{2,1} = M$ che è il coefficiente di mutua induzione. Questo è costante solo se i circuiti sono fissi e indeformabili. Quindi:

$$\phi_{1,2} = M i_1 \quad , \quad \phi_{2,1} = M i_2 \longrightarrow \text{flusso concatenato.}$$

Però il campo magnetico generato da un circuito produce un flusso anche attraverso il circuito stesso. In questo caso si parla di autoflusso del circuito che si scrive:

$$\phi = \int_{\Sigma} \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{dS} \times \vec{U_R}}{R^2} \right) \cdot \vec{U_n} \, d\vec{\Sigma}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = L \cdot i$$

L è il coefficiente di autoinduzione ed è sempre positivo. M e L si misurano in Henry (H). Comunque queste cose le rivedremo quando parleremo dei campi variabili nel tempo.

Quindi in magnetostatica si hanno le seguenti proprietà:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{equazioni di Maxwell della magnetostatica.}$$

Il campo magnetico è solenoidale e non irrotazionale. Parliamo ora delle proprietà magnetiche della materia. Definiamo magnetizzazione il seguente vettore:

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$$

Esistono in natura vari tipi di sostanze che possiedono una magnetizzazione differente in presenza di un campo magnetico. In particolare ci sono:

1) sostanze diamagnetiche in cui la magnetizzazione $\vec{M}$ è opposta al campo magnetico $\vec{B}$. Questo è il tipo principale di sostanze.

2) sostanze paramagnetiche in cui la magnetizzazione è concorde al campo magnetico.

3) sostanze ferromagnetiche in cui c'è una forte attrazione verso la zona in cui il campo magnetico è maggiore. Qui i campioni rimangono magnetizzati anche quando il campo è spento.

Supponiamo ora di riempire completamente un solenoide rettilineo con un mezzo omogeneo. Chiamiamo B_0 il valore del campo magnetico nel vuoto. Si osserva che:

$$\frac{B}{B_0} = k_m$$

dove k_m è la permeabilità magnetica relativa del mezzo considerato. Quindi:

$$B = k_m B_0 = \mu_0 k_m n i = \mu n i$$

dove:

$$\mu = \mu_0 k_m = \text{permeabilità magnetica assoluta.}$$

L'unità di misura di μ è anche quella di μ_0 ed è H/m. Ora in avanti con il termine "mezzo omogeneo" intenderemo un mezzo che insieme alla densità costante nel mezzo avremo anche la permeabilità magnetica relativa costante. La variazione del campo magnetico sarà:

$$B - B_0 = k_m B_0 - B_0 = (k_m - 1) B_0 = \chi_m B_0$$

Definiamo suscettività magnetica la seguente espressione:

$$\chi_m = k_m - 1$$

Si noti che per le sostanze diamagnetiche si ha:

$$k_m < 1 \Rightarrow \chi_m \leq 0$$

Invece nelle sostanze paramagnetiche si ha:

$$k_m > 1 \Rightarrow \chi_m > 0$$

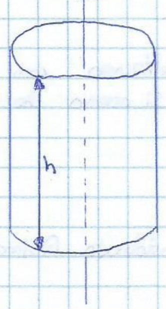
In particolare è importante notare la dipendenza di χ_m dalla temperatura T; tale dipendenza viene esplicitata nella seguente legge di Curie:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T}$$

dove ρ è una densità, T è la temperatura espressa in kelvin, e C è una costante. Nelle sostanze ferromagnetiche si ha che se si va oltre una certa temperatura, il loro comportamento diventa uguale a quello delle sostanze paramagnetiche. In generale tutti gli atomi e le molecole di un materiale acquistano, sotto l'azione del campo B un momento medio $\langle \vec{m} \rangle$ orientato parallelamente a $\vec{B}$. Consideriamo un volumetto $\Delta\tau$ in cui sono contenuti ΔN_τ atomi. Si ha:

$$\Delta\vec{m} = \Delta N_\tau \langle \vec{m} \rangle \Rightarrow \vec{M} = \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N_\tau}{\Delta\tau} \langle \vec{m} \rangle = n \vec{m}$$

Consideriamo ora il seguente cilindro magnetizzato uniformemente:



$d\tau = d\Sigma\, dz \rightarrow$ prismetti con momento magnetico:

$$d\vec{m} = M\, d\tau = M\, d\Sigma\, dz\, \vec{u}_z$$

Secondo il principio di equivalenza di Ampère si ha: $dm = di_m\, d\Sigma\, \vec{u}_z = M\, d\Sigma\, dz\, \vec{u}_z \Rightarrow di_m = M\, dz$

Quindi:

$$i_m = \int_0^h M\, dz = M h$$

Sfruttando il concetto di densità lineare possiamo scrivere:

$$M = \frac{i_m}{h} = J_{s,m} \Rightarrow \vec{J}_{s,m} = \vec{M} \times \vec{u}_n$$

Eseguendo la circuitazione di M lungo un percorso chiuso, si ottiene:

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = i_m$$

Nel caso in cui la magnetizzazione non è uniforme si ha:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Si noti che $\vec{J}_{s,m}$ è una densità lineare di corrente definita su una superficie, mentre $\vec{J}_m$ è una densità di corrente definita su un volume. Giunti a questo punto è necessario modificare le equazioni della magnetostatica nel vuoto, perché ora ci sono mezzi magnetizzati:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

$$\Downarrow$$

In forma differenziale si ha: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$$\Downarrow$$

$$\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M})\, d\vec{s} = \mu_0 i \quad , \quad \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}$$

Introduciamo ora il nuovo campo vettoriale $\vec{H}$ così fatto:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Notiamo subito che: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$; $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

Si noti che la relazione: $\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = i$ esprime la legge di Ampère per il campo H. La circuitazione di H estesa ad una qualsiasi linea chiusa è uguale alla somma delle correnti di conduzione concatenate dalla linea. In termini locali si ha:

$$\begin{cases} \oint \vec{B}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = i \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \end{cases} \rightarrow \text{equazioni della magnetostatica}$$

In particolare la relazione tra $\vec{M}$ e $\vec{H}$ è: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Quindi:

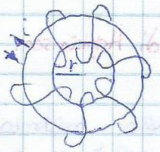
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = \mu_0(\vec{H}+\chi_m\vec{H}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0 k_m \vec{H} = \mu\vec{H}$$

Concludendo:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu}\chi_m\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{k_m}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{k_m-1}{k_m}\vec{B}$$

Talvolta $\vec{H}$ viene detto campo magnetizzante. Infine l'unità di misura della magnetizzazione è: A/m. Vediamo subito un esempio:

- Un solenoide toroidale è riempito con un materiale avente permeabilità magnetica relativa k_m. Calcolare i campi $\vec{H}$ e $\vec{B}$ nel suo interno.



$$\begin{cases} \oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = 2\pi r H = Ni \Rightarrow \vec{H} = \frac{Ni}{2\pi r}\vec{u}_\varphi \\ \vec{B} = \mu_0 k_m \vec{H} = \frac{\mu_0 k_m N i}{2\pi r}\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

Consideriamo ora due mezzi diversamente magnetizzati. Detti $\vec{H}_1$ e $\vec{B}_1 = \mu_1\vec{H}_1$ i campi del primo mezzo e $\vec{u}_n$ il versore normale alla superficie di separazione. Analogamente $\vec{H}_2$ e $\vec{B}_2 = \mu_2\vec{H}_2$ i campi del secondo mezzo. Si ha:

$$B_{1,n} = B_{2,n} \Rightarrow B_1\cos\vartheta_1 = B_2\cos\vartheta_2$$

Quindi il campo magnetico ha la stessa componente normale alla superficie di separazione. Quindi:

$$k_{1,m} H_{1,n} = k_{2,m} H_{2,n} \rightarrow \text{la componente di H è discontinua.}$$

Però si dimostra che:

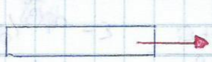
$$H_{1,t} = H_{2,t} \Rightarrow H_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 = H_2\operatorname{sen}\vartheta_2$$

Quindi per analogia si ha:

$$E \rightleftarrows H$$

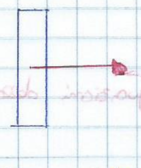
Quindi se abbiamo una cavità parallela alle linee di campo, abbiamo:

$$\vec{H}_c = \vec{H}$$
$$\vec{B}_c = \mu_0\vec{H}_c$$



Se la cavità è piatta e ortogonale alle linee di campo si ha:

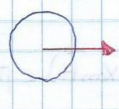
$$\begin{cases} \vec{H}_c = \vec{H} + \vec{\Pi} \\ \vec{B}_c = \vec{B} \end{cases}$$



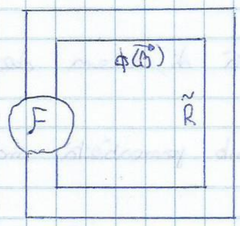
Infine di fronte ad una cavità sferica si ha:

$$\vec{E}_c = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{H}_c = \vec{H} + \frac{\vec{\Pi}}{3}$$

$$\vec{D}_c = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad , \quad \vec{B}_c = \mu_0 (\vec{H} + \vec{\Pi})$$



Accenniamo brevemente anche ai circuiti magnetici. Consideriamo la seguente figura:



$$F = \oint H \cdot ds = Ni \longrightarrow \text{forza magnetomotrice}$$

$$\tilde{R} = \oint \frac{ds}{\mu \Sigma} \longrightarrow \text{riluttanza}$$

$$\Downarrow$$

$$F = \tilde{R} \phi \longrightarrow \text{legge di Hopkinson}$$

Per quanto riguarda la riluttanza, essa gode delle stesse proprietà della resistenza. La forza magnetomotrice si misura in $A/wb = H^{-1}$. Un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo. Come vedremo un campo elettrico e un campo magnetico variabili non possono esistere separatamente. Essi vanno riuniti sotto il concetto di campo elettromagnetico. Consideriamo ora una spira A di filo conduttore. In essa compare una corrente che chiamiamo indotta ogni volta che c'è un moto relativo tra la spira e il campo magnetico. Ma siccome per avere corrente in un circuito è necessario che in esso sia presente una sorgente di forza elettromotrice, possiamo dire che dal moto relativo tra una spira e un campo magnetico ha origine una forza detta forza elettromotrice indotta ε_i. Ogni volta che il flusso del campo magnetico $\phi(\vec{B})$ concatenato con un circuito varia nel tempo, si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso rispetto al tempo. Quindi:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \longrightarrow \text{legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica.}$$

Possiamo poi scrivere:

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Quando un circuito di resistenza R e contenente un generatore di f.e.m è interessato da una variazione del flusso magnetico concatenato, la corrente è data dalla legge di Ohm:

$$i = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i}{R} = \frac{\varepsilon - d\phi(\vec{B})/dt}{R} \quad \text{con} \quad \varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

Il segno meno presente nella legge di Faraday viene messo in evidenza dalla legge di Lenz. Questa legge afferma che l'effetto della f.e.m indotta è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno. Riconsideriamo la precedente relazione:

$$\oint \vec{E_i} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u_n} \, d\Sigma$$

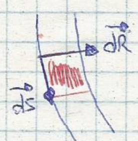
Sappiamo che:

$$\vec{E_i} = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B} \quad , \text{ secondo la forza di Lorentz.}$$

Ma:

$$d\mathcal{E}_i = \vec{E_i} \cdot \vec{ds} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{ds} \Rightarrow \text{su un percorso chiuso (circuito): } \mathcal{E}_i = \oint \vec{E_i} \cdot \vec{ds} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \, \vec{ds}$$

Nel tempo dt ogni elemento della spira si sposta di una quantità pari a $\vec{dR} = \vec{v}dt$ e perciò:



$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E_i} \cdot \vec{ds} = \oint \vec{ds} \times \vec{v} \cdot \vec{B} = \oint \vec{ds} \times \frac{\vec{dR}}{dt} \vec{B}$$

Ricordandoci che: $\vec{ds} \times \vec{dR} = d\Sigma \, \vec{u_n} \Rightarrow d\phi_t(\vec{B}) = \int d\phi = \oint \vec{ds} \times \vec{dR} \cdot \vec{B} = \int_{d\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u_n} \, d\Sigma$

Se la spira si sposta dalla posizione 1 alla posizione 2, si ottiene:

$$d\phi = \phi_2(\vec{B}) - \phi_1(\vec{B}) = -d\phi_t(\vec{B}) \Rightarrow \mathcal{E}_i = \oint \vec{E_i} \cdot \vec{ds} = \frac{d\phi_t(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

La relazione che esprime il legame locale tra la variazione nel tempo del campo magnetico e del campo elettrico indotto è:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quindi la legge di Faraday si applica a tutte le situazioni in cui si ha una linea chiusa interessata da una variazione del flusso magnetico concatenato. Abbiamo visto che quando una spira di resistenza R si muove in un campo magnetico $\vec{B}$ in essa viene introdotta una corrente:

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} \longrightarrow \text{legge di Felici}$$

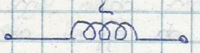
Questa legge fornisce un metodo di misura dell'intensità del campo magnetico. Il campo magnetico generato dalla corrente che percorre un circuito dà luogo ad un flusso magnetico attraverso il circuito stesso. Questo è l'autoflusso. In questo caso si ha:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} L \cdot i$$

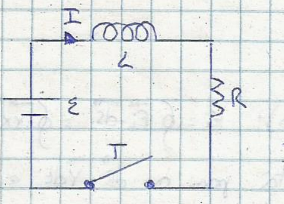
$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$$

Di solito il coefficiente di autoinduzione prende il nome di induttanza. Il componente circuitale che viene descritto dall'induttanza è l'induttore. Il simbolo circuitale dell'induttore è il seguente:



L'induttore viene usato nei circuiti per impedire alla corrente di aumentare o diminuire istantaneamente. La presenza di una f.e.m in un circuito implica un lavoro sulle cariche che costituiscono la corrente. Consideriamo il seguente circuito RL in serie:



$$\mathcal{E} i = R i^2 + L i \frac{di}{dt}$$

NB: $\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = R i \Rightarrow \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + R \cdot i$

Il lavoro nel tempo dt è:

$$\mathcal{E} \cdot i \, dt = R \cdot i^2 dt + L \cdot i \cdot di$$

Integrando si ottiene:

$$\mathcal{L} = \int_0^i L i \, di = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

Si noti che il lavoro non dipende dal modo in cui varia la corrente ma dipende solo dai valori iniziale e finale (è una proprietà). Definiamo energia intrinseca della corrente la seguente espressione:

$$U_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

Si noti inoltre che l'energia immagazzinata nell'induttore si ritrova dissipata nella resistenza sotto forma di calore (EFFETTO JOULE). Però U_L possiamo anche scriverla in questo modo:

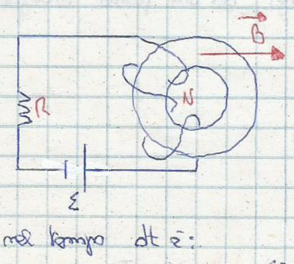
$$U_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau$$

$$\Downarrow$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} H B \longrightarrow \text{densità di energia magnetica}$$

Ma: $dU_m = u_m \, d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \Rightarrow U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \longrightarrow$ energia magnetica totale

Vediamo ora l'energia magnetica in presenza di materiali magnetici. Consideriamo:



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(N \Sigma B) = -N \Sigma \frac{dB}{dt}$$

Ma: $\mathcal{E} = R \cdot i - \mathcal{E}_i = R \cdot i + N \Sigma \frac{dB}{dt}$

Il lavoro nel tempo dt è:

$$\mathcal{E} i \, dt = R \cdot i^2 dt + N \Sigma i \, dB \Rightarrow dU_m = N \Sigma i \, dB = H \, dB \, 2\pi r \Sigma$$

Ricordandosi che: