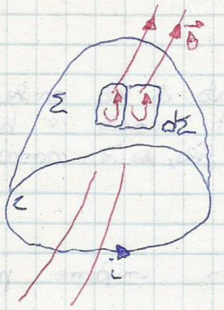
contorno.



L'energia potenziale del generico circuito di area $d\Sigma$ è:

$$dU_p = -d\vec{m}\cdot\vec{B} = -i\vec{B}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = -i\, d\phi(\vec{B})$$

Quindi l'energia potenziale del circuito c è:

$$U_p = -i\int_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = -i\phi(\vec{B})$$

L'energia potenziale di un circuito percorso da corrente i e immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ è uguale al prodotto cambiato di segno della corrente i per il flusso di $\vec{B}$ concatenato col circuito. Quindi definiamo flusso magnetico la seguente grandezza:

$$\phi(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$$

esso si misura in Weber (Wb). Il campo magnetico si misura in Tesla.

Dalle precedenti relazioni si può ricavare il lavoro elementare compiuto:

$$dL = -dU_p = i\, d\phi(\vec{B})$$

In termini finiti si ha:

$$L = i\Delta\phi = i(\phi_2(\vec{B}) - \phi_1(\vec{B}))$$

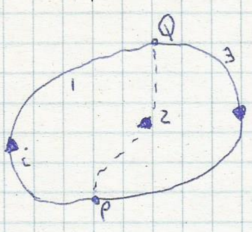
Tutte queste relazioni valgono quando la corrente i è stazionaria. Se il circuito compie una traslazione rigida lungo l'asse x il lavoro è dato da:

$$dL = F_x dx = i\frac{d\phi}{dx}dx \Rightarrow F_x = i\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Quindi:

$$\vec{F} = i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\right) = i\nabla\phi = -\nabla U_p$$

Se il campo magnetico $\vec{B}$ è uniforme, la forza è nulla. Se dividiamo il circuito in due parti, si ha:



La forza su un tratto di filo aperto non piano dipende soltanto dai punti iniziale e finale e non dalla forma del filo, se il campo $\vec{B}$ è uniforme.

In conclusione la forza in un campo magnetico non uniforme parallelo al momento di dipolo è:

$$F_x = m \frac{\partial B}{\partial x}$$

L'analisi sulle caratteristiche del campo magnetico prodotto da correnti in conduttori filiformi indusse Laplace a formulare la prima legge elementare di Laplace. Essa esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo $\vec{ds}$ di filo, percorso dalla corrente i, in un punto P distante R dall'elemento di filo. Quindi:

$$\vec{dB} = k_m i \frac{\vec{ds} \times \vec{u_R}}{R^2} = k_m \frac{i\,ds}{R^2} \vec{u_t} \times \vec{u_R}$$

dove $\vec{u_R}$ è il versore della direzione orientata da $\vec{ds}$ a P, mentre $\vec{u_t}$ è il versore tangente al filo. Si noti che:

$$\vec{ds} = ds\,\vec{u_t}$$

k_m è una costante che nel vuoto è:

$$k_m = 10^{-7}\ H/m \quad ; \quad k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \Rightarrow \mu_0 = k_m 4\pi$$

μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. Quindi:

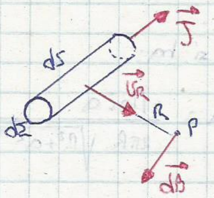
$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{ds} \times \vec{u_R}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\,ds}{R^2} \vec{u_t} \times \vec{u_R}$$

Integrando in un circuito chiuso la precedente relazione si ha:

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{ds} \times \vec{u_R}}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{\vec{ds} \times \vec{u_R}}{R^2} \rightarrow \text{Legge di Ampère Laplace.}$$

Questa legge fornisce il legame cercato tra campo magnetico e corrente. Quest'ultima vale se il filo è filiforme. Se il filo non è filiforme, si considera un elemento lungo ds di sezione $d\Sigma$ percorso dalla corrente di densità $\vec{J}$, e quindi:

$di\,\vec{ds} = \vec{J}\,d\Sigma\,ds = \vec{J}\,d\tau$



Siccome $\vec{J}$ è parallela a ds, si ottiene:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\times\vec{u}_R}{R^2}\,d\tau$$

e integrando sul volume τ si ha:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}\times\vec{u}_R}{R^2}\,d\tau$$

Ricordandoci che: $\vec{J} = nq\vec{v} \Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{u}_R}{R^2}\,n\,d\tau$ dove $n\,d\tau$ mi fornisce il numero di cariche contenute nel volumetto $d\tau$.

Integrando si ha:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{u}_R}{R^2}$$

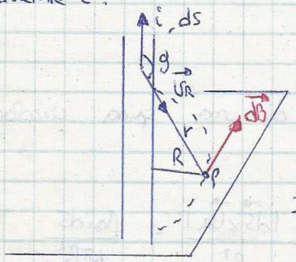
Nel punto in cui abbiamo calcolato il campo magnetico, possiamo anche calcolare il campo elettrico, ottenendo:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_R$$

Quindi: $\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\,\vec{v}\times\vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$ Si noti che: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ → velocità della luce nel vuoto.

Per definizione: $c = 3\cdot 10^8\ m/s$.

Quindi il campo magnetico dipende dal moto delle cariche, indipendentemente dalle cause che generano tale moto. Consideriamo ora un filo conduttore rettilineo di lunghezza '2a', percorso dalla corrente i.



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\vec{ds}\times\vec{u}_R}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}$$

Osserviamo che: $r\,\mathrm{sen}(\pi-\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta = R \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{R^2}$

Inoltre:

$$-s\,\mathrm{tg}\,\theta = s\,\mathrm{tg}(\pi-\theta) = R \Rightarrow ds = \frac{R\,d\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$$

⇓

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d(\cos\theta)}{R}$$

Quindi: $B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_{\cos\theta_i}^{0} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i\cos\theta_i}{4\pi R}$

↳ per tratto di filo di lunghezza 'a'.

Per tutto il tratto di filo si ha:

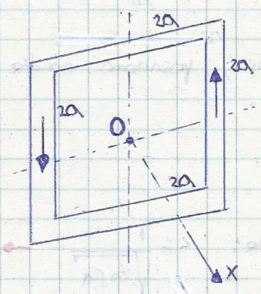
$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}$$

Quindi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}\,\vec{u}_\phi$$

Facciamo tendere $\vartheta_1 \to 0 \Rightarrow \cos\vartheta_1 \to 1 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\vec{u}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\vec{u}_t \times \vec{u}_R$ → Legge di Biot-Savart.

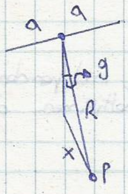
Quest'ultima legge afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende solo dalla distanza dal filo. Supponiamo per esempio di voler calcolare il campo magnetico prodotto da una spira quadrata di lato 2a, nei punti dell'asse della spira.



Ogni lato produce sull'asse x il campo magnetico relativo. Quindi:

$$B_i = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}$$

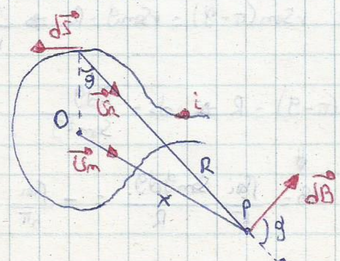
$$B_{i,x} = \frac{\mu_0 i a \cos\vartheta}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{a}{R}\right)^2\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}$$



Quindi: $\vec{B} = 4B_{i,x} = \frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{a^2}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+2a^2}}\vec{u}_x$

con $R^2 = x^2+a^2$.

Calcoliamoci ora il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio R percorsa dalla corrente i.



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{|d\vec{s} \times \vec{u}_R|}{R^2} = \frac{\mu_0 i\, ds}{4\pi R^2}$$

NB: $d\vec{s}, \vec{u}_R$ sono ortogonali.

La componente lungo l'asse x vale:

$$dB_x = \frac{\mu_0 i\, ds}{4\pi R^2}\cos\vartheta$$

In definitiva:

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{R^2} \, ds \, \vec{u}_m = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{R^2} \, 2\pi R \, \vec{u}_x$$

Posto $r^2 = x^2 + R^2$ e $\cos\theta = R/r$ $\Rightarrow$ $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} \vec{u}_m = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \vec{u}_m$

Chiaramente nel centro della spira si ha:

$$\vec{B}_{MAX} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_m$$

Quando $x \gg R$ si ha:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \vec{u}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i\pi R^2}{x^3} \vec{u}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}$$

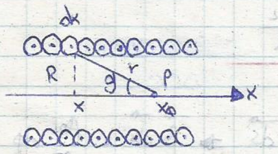
dove $\vec{m} = i\Sigma \vec{u}_m = i\pi R^2 \vec{u}_m$. Il campo magnetico prodotto da una spira nei punti dell'asse ha la stessa struttura del campo elettrico prodotto da un dipolo, basta che ci si ponga a una distanza molto maggiore delle dimensioni del sistema. Un solenoide rettilineo è costituito da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo. Sia d la lunghezza del solenoide, R il raggio, N il numero di spire, si ha:

$$n = N/d = \text{numero di spire per unità di lunghezza.}$$

Nel tratto dx ci sono $n\,dx$ spire. Quindi:

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx$$

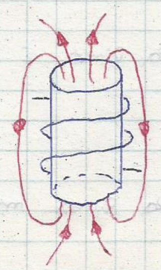
Consideriamo:



$r \operatorname{sen}\theta = R$
$x - x_0 = -R \operatorname{ctg}\theta$ $\Rightarrow$ $dB = \frac{\mu_0 n i}{2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$
$dx = R\,d\theta / \operatorname{sen}^2\theta$

Integrando si ottiene:

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$



Misurando x rispetto al centro del solenoide si ha:

$$B(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2 + 4R^2}} \right)$$

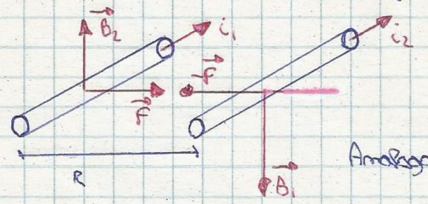
$$\Downarrow$$

$$\rightarrow B_0 = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} \leftarrow$$

In particolare se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio si ha:

$$B = \mu_0 n i$$

Calcoliamoci ora la forza tra due circuiti percorsi da corrente. Graficamente si ha:



$$d\vec{F}_{1,2} = i_2 d\vec{s}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \vec{u}_1)}{R^2}$$

Analogamente:

$$d\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \vec{u}_2)}{R^2}$$

Quindi:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \vec{u}_1)}{R^2} \quad , \quad \vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \vec{u}_2)}{R^2}$$

Per una nota proprietà dei vettori si può scrivere: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot \vec{u}_1) d\vec{s}_1}{R^2} - \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)\vec{u}_1}{R^2}$$

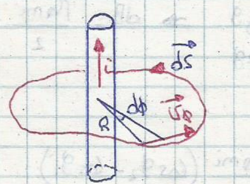
Siccome $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$ si ottiene:

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)\vec{u}_1}{R^2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1)\vec{u}_2}{R^2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Dalla precedente figura se le correnti sono equiverse la forza è attrattiva, altrimenti è repulsiva. Si ha che:

$$F_{1,2} = B_1 i_2 d = \frac{\mu_0 i_1 i_2 d}{2\pi R} \rightarrow \frac{F}{d} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi R}$$

Consideriamo ora:



$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi \cdot d\vec{s} \rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi$$

Quindi:

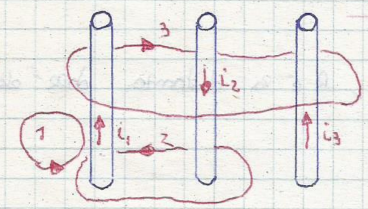
$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi$$

Se la linea è chiusa e concatenata si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \pm \mu_0 i \longrightarrow \text{Legge di Ampère.}$$

Se la linea non concatena il filo, l'integrale precedente sarà nullo.

Consideriamo ora il seguente caso:



$\Gamma_1 = 0$

$\Gamma_2 = \mu_0(i_1 - i_2)$

$\Gamma_3 = \mu_0(-i_1 + i_2 - i_3)$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint \left(\sum_k \vec{B}_k\right)\cdot d\vec{s} = \sum_k \oint \vec{B}_k \cdot d\vec{s} = \sum_k \Gamma_k$$

Possiamo scrivere la precedente relazione come:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

Ma per il teorema di Stokes si ha:

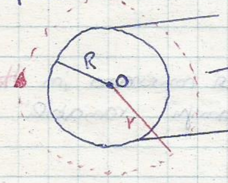
$$\int_\Sigma \mathrm{Rot}\,\vec{B}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} \Rightarrow \int_\Sigma \mathrm{Rot}\,\vec{B}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

Quindi:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

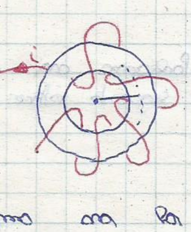
Vediamo qualche esempio:

- Un filo rettilineo indefinito di raggio R è percorso da una corrente di intensità i. Calcolare il campo magnetico prodotto dal filo in funzione della distanza R dall'asse del filo.



$$B = B(r) \Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

- Un solenoide toroidale è costituito da N spire avvolte ad una superficie a forma di toroide. Calcolare il campo magnetico se nel sistema circola la corrente i.



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 N i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi}$$

Consideriamo ora la seguente situazione:

Calcoliamoci il flusso $\Phi_{12} = ?$

Siccome:

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{B}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

e: