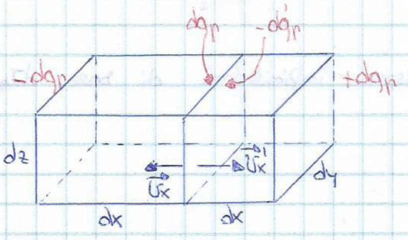
(39)




Sappiamo che:

$$-dq'_p = \vec{P'} \cdot \vec{U'_x}\, d\Sigma = -P'_x\, dy\, dz$$

$$dq_p = \vec{P} \cdot \vec{U_x}\, d\Sigma = P_x\, dx\, dy$$

$$dq_p - dq'_p = -(P'_x - P_x)\, dy\, dz = -\frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

Quindi dentro un volume infinitesimo $d\tau = dx\,dy\,dz$, c'è la carica:

$$dq_p = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_p = \frac{dq_p}{d\tau} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Quindi in un dielettrico in cui la polarizzazione non è uniforme, esiste una densità spaziale di carica di polarizzazione uguale in ogni punto all'opposto della divergenza del vettore $\vec{P}$. Anche in questo caso la carica totale di polarizzazione deve essere nulla e quindi:

$$\oint \sigma_p\, d\Sigma + \int_\tau \rho_p\, d\tau = 0$$

cioè:

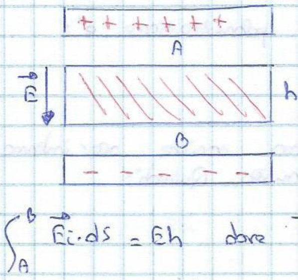
$$\oint \vec{P} \cdot \vec{U_n} = \int_\tau \nabla \cdot \vec{P}\, d\tau$$

(coincide con il teorema della divergenza).

Quindi si può anche calcolare il potenziale e il campo elettrico in ogni punto esterno al dielettrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\vec{P} \cdot \vec{U_n}\, d\Sigma}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\nabla \cdot \vec{P}\, d\tau}{R} \quad , \quad \vec{E} = -\nabla V$$

Vediamo ora il campo elettrico all'interno di un dielettrico polarizzato.




Nello spazio vuoto tra le armature il campo elettrico vale $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$, mentre all'interno del dielettrico vale:

$$E = \frac{(\sigma_0 - \sigma_p)}{\varepsilon_0} = E_0 - P/\varepsilon_0$$

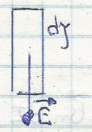
Mentre: $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E_i} \cdot d\vec{s} = Eh$ dove $\vec{E_i}$ è il campo interno.

Definiamo campo elettrico medio macroscopico:

$$E = \frac{1}{h} \int_A^B \vec{E_i} \cdot d\vec{s}$$

L'effetto delle cariche di polarizzazione è quello di diminuire il campo dovuto alle cariche libere esterne. Per questa ragione si parla di effetto depolarizzante. Quindi:

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\tau}\int_\tau \vec{E}\, d\tau$$




Anche in presenza di materiali dielettrici continuano a valere le seguenti relazioni:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Anche la legge di Gauss resta valida. Bisogna però tenere conto anche delle cariche di polarizzazione:

$$\oint \vec{E}\cdot \vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q+q_p}{\varepsilon_0}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche libere e delle cariche di polarizzazione contenute all'interno della superficie. Quindi:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_0}$$

Ma: $\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\varepsilon_0\vec{E} = \rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = \rho$

$$\Downarrow$$

$$\oint(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\,\vec{u}_n\, d\Sigma = q$$

Chiamiamo $\vec{D}$ il vettore induzione dielettrica così chiamato:

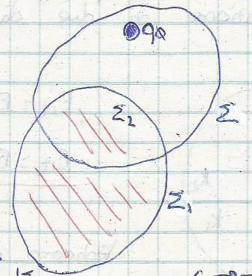
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \\ \oint \vec{D}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = q \end{cases}$$

Il flusso del vettore $\vec{D}$ attraverso una superficie chiusa, contenente sia cariche libere che cariche di polarizzazione, dipende soltanto dalle cariche libere.

Consideriamo la seguente situazione:




$$\phi(\vec{E}) = \frac{q_0}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Sigma_1}\sigma_p\, d\Sigma + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau \rho_p\, d\tau$$

Ma: $1/\varepsilon_0 = \int_{\Sigma_1}\sigma_p\, d\Sigma = 1/\varepsilon_0\int_{\Sigma_1}\vec{P}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$

$$1/\varepsilon_0\int_\tau \rho_p\, d\tau = -1/\varepsilon_0\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, d\tau = -1/\varepsilon_0\int_{\Sigma_1+\Sigma_2}\vec{P}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma \Rightarrow \phi(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q_0}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Sigma_1}\vec{P}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$$

In conclusione:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{P}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma_1 = \oint_{\Sigma} \vec{P}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_{\Sigma} (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = q_0$$

Nello spazio privo di cariche libere, abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \\ \oint \vec{D}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = 0 \end{cases}$$

Quindi in assenza di cariche libere il campo vettoriale $\vec{D}$ è solenoidale. $\vec{D}$ però non è un campo conservativo. Nello spazio vuoto si ha:

$$\vec{P} = 0 \quad e \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

Siccome: $\vec{P} = \varepsilon_0(k-1)\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0 k\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$

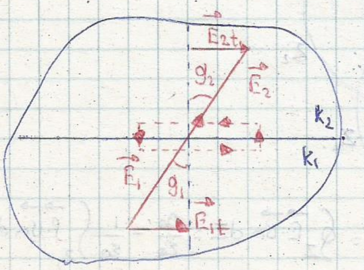
In un dielettrico lineare l'induzione dielettrica, il campo elettrico e la polarizzazione sono vettori tra loro paralleli. Se il dielettrico lineare è omogeneo, cioè se la densità è costante, anche la costante dielettrica relativa è costante e quindi:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{k-1}{k}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$$

In assenza di cariche libere:

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$$

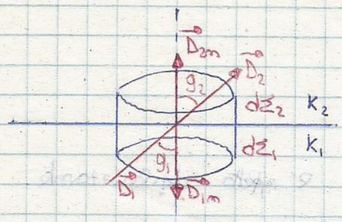
In un dielettrico lineare e omogeneo la densità spaziale di carica di polarizzazione è nulla e le cariche di polarizzazione sono distribuite esclusivamente sulla superficie. I dielettrici lineari sono dotati di simmetria spaziale cioè sono isotropi. Per quanto riguarda i dielettrici anisotropi, come per esempio i cristalli, il vettore $\vec{P}$ non è in generale parallelo ad $\vec{E}$. Nemmeno il vettore $\vec{D}$ è parallelo ad $\vec{E}$. Abbiamo già studiato la discontinuità del campo elettrico nell'attraversare una superficie. Consideriamo la linea di separazione di due differenti materiali dielettrici aventi $k_1$ e $k_2$ differenti.




$$E_{1t} = E_1 \operatorname{sen}\theta_1 = E_2 \operatorname{sen}\theta_2 = E_{2t}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Vediamo ora la stessa cosa con il vettore $\vec{D}$:




$$\vec{D}_2\vec{U}_2\, dZ + \vec{D}_1\vec{U}_1\, dZ = (D_{2n} - D_{1n})\, dZ = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

Quindi: $\varepsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \varepsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$

$$\Downarrow$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{1p} - \sigma_{2p}}{\varepsilon_0}$$

Quindi mettendo insieme quanto visto, otteniamo il così detto fenomeno della rifrazione delle linee di forza. In particolare:

$$K_1 \varepsilon_0 E_1 \cos\vartheta_1 = K_2 \varepsilon_0 E_2 \cos\vartheta_2$$

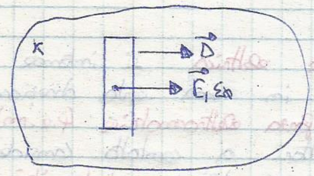
$$\Downarrow$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{Tg\,\vartheta_2}{Tg\,\vartheta_1}$$

Quindi se $\vartheta_1 < \vartheta_2 \Rightarrow K_1 < K_2$, e le linee di forza si allontanano dalla normale alla superficie.
Se:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \Rightarrow D_1 = D_2 \quad e \quad K_1 E_1 = K_2 E_2.$$

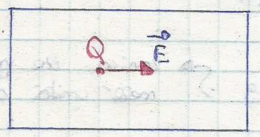
Se pratichiamo una cavità nel dielettrico (cavità vuota) in questo modo:



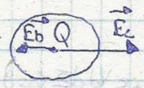

$\vec{D}$ ha lo stesso valore nel dielettrico e nella cavità.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_1$$

Vogliamo adesso calcolare il campo elettrico all'interno di una cavità in un dielettrico uniformemente polarizzato. Prendiamo un punto Q nel dielettrico:




$$\vec{E} = \vec{E}_b + \vec{E}_c$$




$\vec{E}_b$ = campo elettrico dovuto al volumetto che racchiude Q.

$\vec{E}_c$ = campo elettrico dovuto alle altre cariche.

Vediamo degli esempi di cavità:

1) CAVITÀ PIATTA ($R \gg h$) $\quad \vec{E}_c = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = K\vec{E}$

2) CAVITÀ LUNGA E SOTTILE ($R \ll h$) $\quad \vec{E}_c = \vec{E} + \dfrac{2R^2}{\varepsilon_0 h^2}\vec{P} = \left(1 + \dfrac{2R^2}{h^2}\chi\right)\vec{E}$

3) CAVITÀ SFERICA $\quad \vec{E}_b = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_c = \vec{E} - \vec{E}_b = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

Quindi in generale si ha:

$$\vec{E}_c = \vec{E} + \gamma \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

con: $\gamma = 0 \Rightarrow$ cavità cilindrica sottile
$\gamma = 1 \Rightarrow$ cavità cilindrica piana
$\gamma = 1/3 \Rightarrow$ cavità sferica

$-\gamma \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$ = misura l'effetto depolarizzante.

$\gamma$ viene chiamato fattore di depolarizzazione. Giunti a questo punto concludiamo l'argomento sui dielettrici definendo per essi la densità di energia elettrostatica:

$$\bar{U}_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$

Quindi:

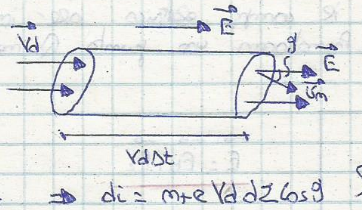
$$U_e = \int_\tau d\bar{U}_e \, d\tau = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \, d\tau$$

Nei dielettrici anisotropi si ha:

$$\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \bar{U}_e$$

Definiamo ora il concetto di corrente elettrica. Per corrente elettrica si intende quel fenomeno che consiste in un moto ordinato di elettroni in una certa direzione. È un esempio di conduzione elettrica. Chiamiamo generatore di forza elettromotrice (f.e.m) un dispositivo capace di mantenere una d.d.p tra due conduttori a contatto. Consideriamo ora una superficie $\Sigma$ tracciata all'interno del conduttore. Si definisce intensità di corrente la seguente espressione:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$




Abbiamo: $d\tau = V_d \Delta t \, d\Sigma \cos\theta$
$\Delta q = n_+ e \, d\tau = n_+ e V_d \, d\Sigma \cos\theta \, \Delta t \Rightarrow di = n_+ e V_d \, d\Sigma \cos\theta$ → carica che passa nell'unità di tempo.

Definiamo quindi il vettore densità di corrente $\vec{J}$ come:

$$\vec{J} = n_+ e \vec{V_d}$$

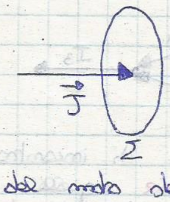
dove $\vec{V_d}$ è la velocità di deriva. Quindi: $di = \vec{J}\cdot\vec{u_n}\, d\Sigma$

$$\Downarrow$$

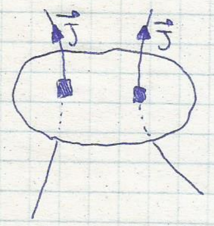
$$i = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\vec{u_n}\, d\Sigma = \phi_\Sigma(\vec{J})$$

Quindi l'intensità di corrente è uguale al flusso del vettore densità di corrente attraverso la superficie $\Sigma$. Se $\Sigma$ è ortogonale a $\vec{J}$ si può scrivere:

$$i = J\Sigma \quad o \quad J = \frac{i}{\Sigma}$$




La densità di corrente è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche. L'unità di misura della corrente è l'ampère (A). Consideriamo ora una regione di spazio di volume $d\tau$ delimitato da una superficie chiusa $\Sigma$. Abbiamo:




$$i = \oint \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$$

Il principio di conservazione della carica però richiede che $i$ sia uguale alla variazione nell'unità di tempo della carica complessiva contenuta all'interno di $\Sigma$. Quindi:

$$i = \oint \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t}$$

Quando la carica contenuta all'interno della superficie non varia, si ha una condizione di stazionarietà:

$$\oint \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = 0$$

Siccome:

$$q_{int} = \int_\tau \rho\, d\tau \Rightarrow \oint J\cdot u_n\, d\Sigma = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\tau \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\tau = 0$$ (teorema della divergenza).

Quindi: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ → equazione di continuità

In condizioni di stazionarietà si ha: $\partial \rho / \partial t = 0$ e quindi:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$ → regime stazionario.

Quindi il vettore densità di corrente $\vec{J}$ in regime stazionario è solenoidale.
Quindi:

$$\oint \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1\cdot\vec{u}_{n_1}\, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2\cdot\vec{u}_2\, d\Sigma_2 = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1\cdot\vec{u}_{n_1}\, d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2\,(-\vec{u}_{n_2})\, d\Sigma_2$$

Perciò:

$$i_1 = i_2$$