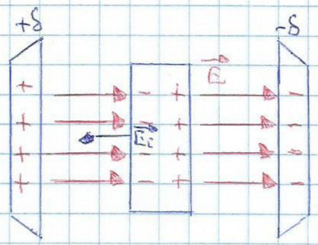


$\vec{E_i}$ = campo elettrostatico indotto

Quando $\vec{E_i} = -\vec{E}$, abbiamo raggiunto l'equilibrio all'interno del conduttore.

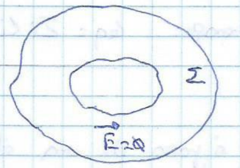
Fino ad ora abbiamo parlato di un solo conduttore. Se poniamo due conduttori a contatto, essi avranno lo stesso potenziale. Chiamiamo capacità del conduttore la seguente espressione:

$$C = \frac{q}{V}$$

La capacità si misura in Farad (F). Per esempio se vogliamo determinare la capacità di un conduttore sferico isolato di raggio R abbiamo:

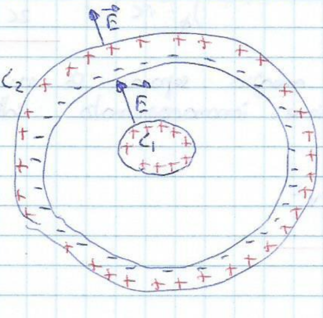
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{q/4\pi\varepsilon_0 R} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Consideriamo ora un conduttore carico che abbia al suo interno una cavità.



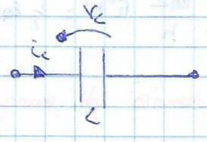
Siccome all'interno di Σ, $\vec{E}=0$, si ha che il flusso è nullo e quindi non ci sono cariche interne. Questo comporta che sulle pareti della cavità la carica è nulla.

In conclusione la carica di un conduttore si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche se il conduttore è cavo. Consideriamo ora la seguente situazione:



Questa figura illustra il fenomeno di induzione completa. In sostanza tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2.

Introduciamo ora il condensatore. Un condensatore è un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa. I due conduttori prendono il nome di armature del condensatore. Il simbolo circuitale del condensatore è il seguente:



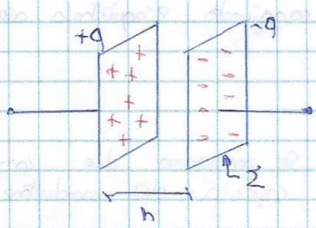
è un bipolo utilizzatore.

Possiamo scrivere:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

CONDENSATORE PIANO

Quindi:



$$\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \, \vec{u}_n$$

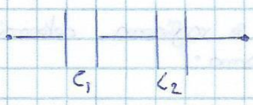
$$V_1 - V_2 = E \cdot h = \sigma/\varepsilon_0 \, h = \frac{\sigma\Sigma}{\sigma\varepsilon_0} h = \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma} h$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$$

I condensatori possono essere collegati tra loro in due modi differenti:

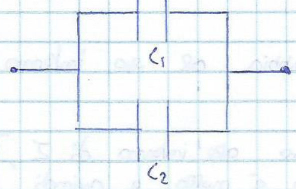
1) SERIE:



$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

In generale: $C_{eq} = \sum_i \frac{1}{1/C_i}$

2) PARALLELO:



$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

In generale: $C_{eq} = \sum_i C_i$

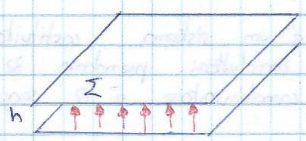
Il processo di carica di un condensatore, in cui si passa da una situazione di carica zero sulle armature alla situazione in cui c'è carica, consiste in una separazione di cariche. Il lavoro necessario per spostare una carica dq attraverso la d.d.p V è:

$$dL = V dq = \frac{q}{C} dq \Rightarrow \int dL = L = \int_0^q \frac{dq}{C} \cdot q = \frac{q^2}{2C}$$

Questo è il lavoro necessario per spostare o meglio separare le cariche. Questo lavoro, che viene effettuato contro la forza elettrostatica, viene immagazzinato sotto forma di energia potenziale elettrostatica. Essa per definizione è:

$$U_e = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Consideriamo ora un condensatore piano:



Supponiamo che il campo tra le armature sia uniforme (costante). Si ha:

$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tau$$

essendo $\tau = \Sigma h$ il volume del condensatore. Definiamo ora densità di energia elettrostatica la seguente espressione:

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Si può dimostrare che l'energia contenuta in ogni volume infinitesimo $d\tau$ è:

$$dU_e = u_e\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

Per esempio se vogliamo calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2 abbiamo:

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Abbiamo visto in precedenza che l'energia potenziale elettrostatica è del tipo:

$$U_e = \Sigma\, q_i V_{ij}$$

con: $V_{ij} = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$. Ricordandosi che:

$$\begin{array}{l} dq = \lambda\, dl \\ dq = \delta\, d\Sigma \\ dq = \rho\, d\tau \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} U_e = \int \frac{1}{2} V\lambda\, ds \\ U_e = \int \frac{1}{2} V\delta\, d\Sigma \\ U_e = \int \frac{1}{2} V\rho\, d\tau \end{array}$$

Nel caso dei conduttori la carica è superficiale, e il potenziale è costante. Quindi:

$$U_e = \frac{1}{2}V\int \delta\, d\Sigma = \frac{1}{2}qV$$

e per più conduttori si ha:

$$U_e = \frac{1}{2}\Sigma_i\, q_i V_i$$

Per esempio se vogliamo calcolare l'energia elettrostatica di un sistema di cinque cariche puntiformi si ha:

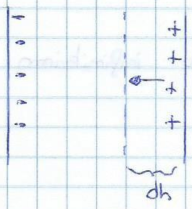
$$U_e = q_2V_{12} + q_3V_{13} + q_3V_{23} + q_4V_{14} + q_4V_{24} + q_4V_{34} + q_5V_{15} + q_5V_{25} + q_5V_{35} + q_5V_{45}.$$

Quindi l'energia elettrostatica di un condensatore piano è:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}h$$

Tra le armature si esercita una forza $\vec{F}$ attrattiva parallela al campo.

Supponiamo di mantenere fissa l'armatura negativa e di lasciare avvicinare quella positiva.



Siccome $V = Eh$ e $C = q/V \Rightarrow q/C = Eh$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{q}{Eh}$$

La capacità aumenta perché la distanza tra le armature h diminuisce.

Quindi:

$$dU_e = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\delta^2}{2\varepsilon_0} d\tau$$

e viene fornito lavoro: $dL = -dU_e = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma} dh$

Quindi la forza agente sull'armatura è:

$$F = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma} = -\frac{\delta^2}{2\varepsilon_0}\Sigma$$

Per un campo conservativo, si ha:

$$\vec{F} = -\nabla U_e \Rightarrow \vec{F} = -\frac{dU_e}{dh} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}$$

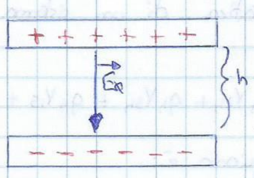
Definiamo pressione elettrostatica la seguente espressione:

$$p_e = \frac{F_e}{\Sigma} = \frac{\delta^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

La pressione elettrostatica (che si misura in J/m^3) coincide con la densità di energia elettrostatica sulla superficie del conduttore. Si ricordi che se la carica o il potenziale sono costanti, si può scrivere:

$$F_x = -\frac{\partial U_e}{\partial x}$$

Riconsideriamo ora il classico condensatore piano:



$$\begin{cases} E_0 = \frac{\delta_0}{\varepsilon_0} \\ V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 \cdot h \end{cases}$$

Se ora introduciamo una lastra di spessore $s<h$ tra le armature del condensatore, osserviamo che la d.d.p tra le armature diminuisce. Quindi:

$$V = E_0(h-s) < V_0$$

Se ora ripetiamo l'esperimento con una lastra di materiale isolante, si ha lo stesso effetto visto in precedenza, cioè la d.d.p diminuisce, ma tale diminuzione è minore rispetto al caso precedente. La d.d.p diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore della lastra. Quando tutto lo spazio tra le armature del condensatore è riempito di materiale isolante, allora la d.d.p assume il minimo valore V_k. Le sostanze isolanti che hanno questa proprietà di ridurre la d.d.p tra le armature, si chiamano dielettrici. Chiamiamo:

$$k = \frac{V_0}{V_k} > 1 \longrightarrow \text{costante dielettrica relativa.}$$

Quindi se il condensatore piano è completamente riempito di dielettrico, il campo vale:

$$E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0}$$

Perciò la variazione del campo elettrico dovuta alla presenza del dielettrico è:

$$E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0} = \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\chi}{1+\chi}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

Si definisce:

$$\chi = k-1$$

la suscettività elettrica del dielettrico. Quindi:

$$E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} \quad \text{ponendo:} \quad \sigma_p = \frac{k-1}{k}\sigma_0$$

La capacità del condensatore piano:

$$C_k = \frac{q_0}{V_k} = k\frac{q_0}{V_0} = kC_0$$

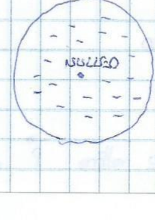
Chiamiamo costante dielettrica assoluta la seguente grandezza:

$$\varepsilon = k\varepsilon_0$$

Quindi:

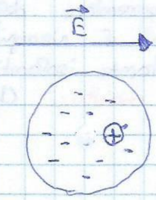
$$C_k = kC_0 = \frac{k\varepsilon_0\Sigma}{h} = \frac{\varepsilon\Sigma}{h}$$

In particolare il vuoto può essere assimilato a un dielettrico con costante assoluta ε_0, $k=1$, e suscettività $\chi=0$. Esempi di dielettrici sono la carta, la porcellana, il polistirolo, il vetro, l'aria, l'acqua, ...
All'interno dei conduttori esistono un certo numero di elettroni liberi di muoversi e questi formano un gas di elettroni. Se si applica a un dielettrico un campo elettrico esterno, avviene soltanto uno spostamento locale delle cariche. In condizioni normali però si ha:



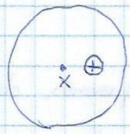
Il centro di massa della nuvola negativa coincide con il nucleo.

Sotto l'azione di un campo $\vec{E}$, il centro di massa della nube subisce uno spostamento in verso contrario a quello del campo.



Si raggiunge una posizione di equilibrio quando questo effetto è bilanciato dall'attrazione tra le cariche di segno opposto.

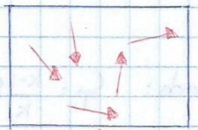
Indichiamo con $\vec{x}$ il vettore che va dal centro della carica negativa al nucleo.



Definiamo momento di dipolo elettrico:

$$\vec{p}_a = Ze\vec{x}$$

Questo momento è parallelo al campo e concorde con esso. Il fenomeno cessa quando si annulla il campo. Questo fenomeno prende il nome di polarizzazione elettronica. Considerando ora un volumetto $\Delta\tau$ nell'intorno di O, in cui sono contenuti ΔN atomi.



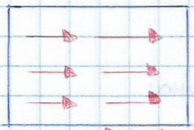
$\langle\vec{p}\rangle = 0$

$$\Delta\vec{P} = \Delta N \langle\vec{p}\rangle$$

dove $\langle\vec{p}\rangle$ = momento di dipolo elettrico medio.

Quindi:

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau}\langle\vec{p}\rangle = n\langle\vec{p}\rangle$$



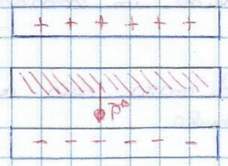
$\langle\vec{p}\rangle \parallel \vec{E}$

NB: n è il numero di atomi per unità di volume.

Il vettore $\vec{P}$ caratterizza l'effetto di formazione dei momenti di dipolo indotti dal campo esterno, e si chiama polarizzazione del dielettrico. In generale:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(k-1)\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

I dielettrici che obbediscono a tale relazione vengono detti lineari. Riprendiamo ora in considerazione il solito condensatore:



Supponiamo la lastra polarizzata uniformemente, cioè il vettore $\vec{P}$ è costante in tutti i punti della lastra. Suddividiamo ora la lastra in prismi infinitesimi di base $d\Sigma_0$ e altezza dh e volume:

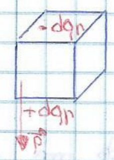
$$d\tau = d\Sigma_0 \, dh$$

Abbiamo:

$$d\vec{P} = \vec{P} \, d\tau = \vec{P} \, d\Sigma_0 \, \vec{dh}$$

Sostituiamo ora al singolo prisma un sistema costituito da due cariche $\pm dq_p = \pm P \, d\Sigma_0$, poste nel vuoto e distanti dh. Abbiamo:

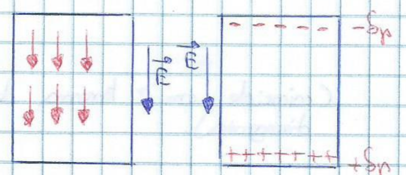
$$\pm \sigma_p = \pm dq_p / d\Sigma_0 = \pm P$$



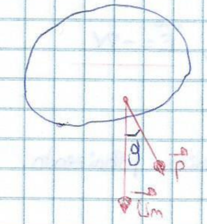
La lastra quindi è equivalente a due distribuzioni di carica, localizzate sulle facce con densità:

$$\pm \sigma_p = \pm P$$

Si noti che queste cariche q_p dette cariche di polarizzazione non sono libere di muoversi, ma sono vincolate agli atomi.



Estendiamo ora questo risultato ad un dielettrico di forma qualsiasi, sempre uniformemente polarizzato.



$dq_p = P \, d\Sigma_0$ è distribuita sulla superficie $d\Sigma$, con $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\vartheta$. Quindi:

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{d\Sigma} = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P\cos\vartheta = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

In generale la densità superficiale di carica di polarizzazione è:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n = P\cos\vartheta$$

Se la polarizzazione è uniforme non si manifestano cariche all'interno del dielettrico, e quindi la carica totale superficiale deve essere nulla. Quindi:

$$\oint \sigma_p \, d\Sigma = \oint \vec{P} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

Supponiamo ora che la polarizzazione non sia uniforme: