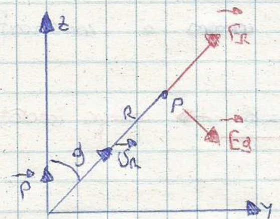
Il campo sta nel piano $\vec{P}, \vec{U_R}$. Vettorialmente:

$$\vec{E} = E_R\vec{U_R} + E_\theta\vec{U_\theta} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2\cos\theta\,\vec{U_R} + \sin\theta\,\vec{U_\theta}\right)$$



Il modulo è:

$$E = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

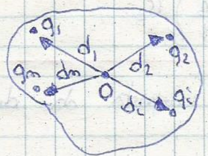
mentre θ è:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tg}\,\theta = \frac{E_\theta}{E_R} = \mathrm{Tg}\,\vartheta$$

Esprimiamo anche il momento del dipolo in componenti polari:

$$\vec{P} = P\cos\theta\,\vec{U_R} - P\sin\theta\,\vec{U_\theta}$$

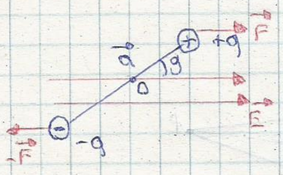
Se poi abbiamo un sistema di cariche del seguente tipo:



$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{d_i}$$

Consideriamo ora il caso di un dipolo formato da una carica $-q$ posta nel punto $P_1(x,y,z)$ e da una carica $+q$ posta nel punto $P_2(x+a_x, y+a_y, z+a_z)$. Si ha:

$$\vec{a} = a_x\vec{U_x} + a_y\vec{U_y} + a_z\vec{U_z} \Rightarrow \vec{P} = q\cdot\vec{a}$$



Se il dipolo si trova in una regione soggetta al campo elettrico, si ha:

$$U_e = qV(x+a_x, y+a_y, z+a_z) - qV(x,y,z)$$

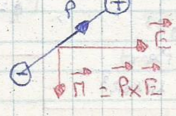
Quindi:

$$V(x+a_x, y+a_y, z+a_z) = V(x,y,z) + \frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z$$

$$\Downarrow$$

$$U_e = qa_x\frac{\partial V}{\partial x} + qa_y\frac{\partial V}{\partial y} + qa_z\frac{\partial V}{\partial z} = -\vec{P}\cdot\vec{E} = -P\cos\theta E$$

Graficamente si ha:



$\vec{\Pi}$ = momento delle forze.

Si ha: $\vec{\Pi} = \vec{P}\times\vec{E}$ (momento agente su un dipolo).

Sempre per definizione si ha:

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

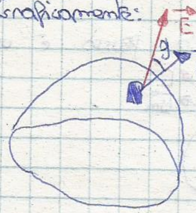
e quindi la forza su di un dipolo in un campo elettrostatico è:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$F_z = \partial/_{\partial z}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Consideriamo ora una superficie $d\Sigma$ immersa in una regione in cui è definito un campo $\vec{E}$. Graficamente:



Si definisce flusso di $\vec{E}$ attraverso $d\Sigma$ la seguente quantità scalare:

$$d\phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{U}_n \, d\Sigma = E\cos\theta \, d\Sigma = E_n \, d\Sigma$$

Chiaramente il flusso attraverso una superficie finita Σ sarà:

$$\int d\phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{U}_n \, d\Sigma$$

$$\Downarrow$$

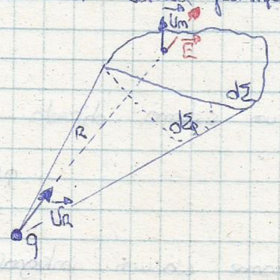
$$\phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{U}_n \, d\Sigma$$

Se la superficie è chiusa si ottiene:

$$\phi(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{U}_n \, d\Sigma$$

Si noti immediatamente che se $\vec{E}\cdot\vec{U}_n > 0$ si parla di flusso uscente di $\vec{E}$, mentre se $\vec{E}\cdot\vec{U}_n < 0$ si parla di flusso entrante di $\vec{E}$. In particolare se consideriamo una carica puntiforme q si ha:

$$d\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{U}_R\cdot\vec{U}_n}{R^2}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma\cos\theta}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma_0}{R^2}$$



$d\Sigma_0$ è la proiezione di $d\Sigma$ sul piano perpendicolare a $\vec{U}_R$. Per definizione:

$$d\Sigma_0/_{R^2} = d\Omega = \text{angolo solido}$$

L'angolo solido è l'angolo normale esteso però a tre dimensioni. Quindi:

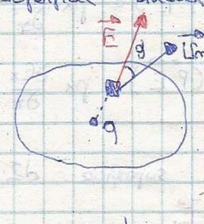
$$d\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

Il flusso del campo $\vec{E}$ di una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla carica. Quindi:

$$\phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\Omega$$

Calcoliamoci adesso il flusso di $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa, distinguendo subito due casi:

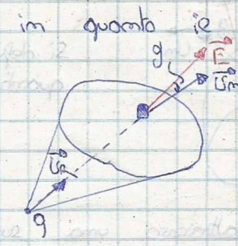
1) CARICA q INTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA $\Rightarrow$



$$\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,4\pi = q/\varepsilon_0$$

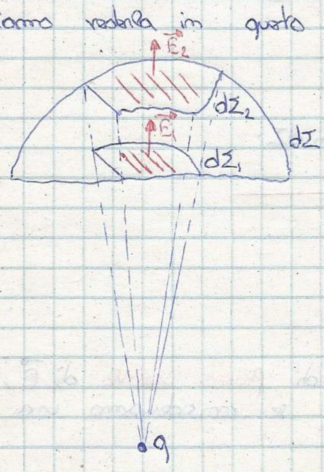
Si noti che tutti i contributi $\vec{E}\cdot\vec{u}_n$ si sommano in quanto il flusso è uscente dalla superficie.

2) CARICA q ESTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA $\Rightarrow$



$$\phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = 0$$

Infatti possiamo vederla in questo modo:



$$d\phi_1(\vec{E}) = \vec{E}_1\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma_1 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$$d\phi_2(\vec{E}) = \vec{E}_2\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = -d\phi_1(\vec{E})$$

$$\Downarrow$$

$$d\phi_1(\vec{E}) + d\phi_2(\vec{E}) = 0$$

Per un sistema discreto di cariche si ha:

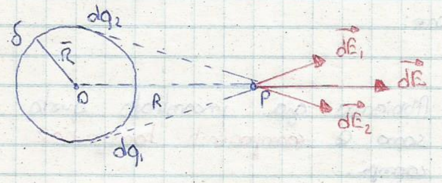
$$\phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \oint \left(\sum_i \vec{E}_i\right)\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \sum_i \oint \vec{E}_i\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$$

Siccome ciascun integrale vale q_i/ε_0 si ha:

$$\phi(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_i q_i\right)_{int} \quad \text{oppure:} \quad \phi(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Sigma \rho(x,y,z)\, d\tau$$

Questo è il teorema di Gauss.

Esso afferma che il flusso del campo $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per ε_0. Vediamo ora qualche esempio. Supponiamo di avere una carica q distribuita con densità superficiale costante δ, su una superficie sferica di raggio R.



Vogliamo calcolare il campo $\vec{E}$. Calcoliamo dapprima il campo all'esterno. Siccome δ = costante, il campo è radiale e quindi:

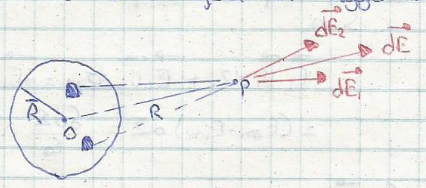
$$\vec{E} = E(R)\vec{u}_R$$

Quindi:

$$\phi(\vec{E}) = \oint E(R)\vec{u}_R \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = E(R)\oint d\Sigma = E(R)\,4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Posto: $q = 4\pi\bar{R}^2\delta \Rightarrow E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\delta\bar{R}^2}{\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_R$

Il campo all'esterno di una distribuzione superficiale di carica è uguale a quello di una carica puntiforme di egual valore concentrata in O. All'interno non c'è carica per cui il campo è nullo. Se avessimo invece avuto una carica q distribuita con densità spaziale ρ uniforme nel volume di una sfera di raggio $\bar{R}$, si sarebbe ottenuto:



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_R = \frac{\rho\bar{R}^3}{3\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_R$$

Infatti:

$$dq = \rho\, d\tau \Rightarrow q = \rho\tau = \rho\tfrac{4}{3}\pi\bar{R}^3 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\bar{R}^3}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho\bar{R}^3}{3\varepsilon_0 R^2}$$

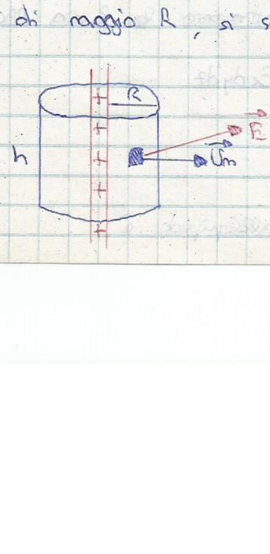
Quindi all'interno il campo non è più nullo. Perciò:

$$\phi(\vec{E}) = 4\pi R^2 E = \frac{q'}{\varepsilon_0} \quad \text{con} \quad q' = \rho\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\bar{R}^3}\frac{4}{3}\pi R^3 = q\frac{R^3}{\bar{R}^3}$$

Quindi il modulo è:

$$E = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0\bar{R}^3} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

Se invece avessimo avuto una distribuzione spaziale continua e uniforme di carica con forma cilindrica di raggio R, si sarebbe ottenuto:



$$\phi(\vec{E}) = \oint E\Sigma = 2\pi R h E = q/\varepsilon_0$$

La carica contenuta dentro Σ è:

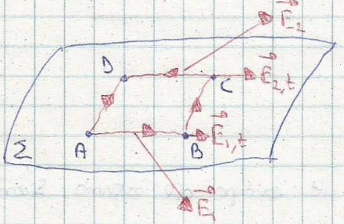
$$q = \int \rho\, d\tau = \rho\pi R^2 h = \lambda h \quad \text{con} \quad \lambda = \rho\pi R^2 = q/h.$$

Quindi:

$$\phi(\vec{E}) = 2\pi R h E = \lambda h/\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho \bar{R}^2}{2\varepsilon_0 R}$$

$\bar{R}$ è il raggio di un cilindro avente altezza unitaria.

Consideriamo ora la seguente situazione:



Abbiamo già incontrato questo percorso. $\vec{E}_{1,t}$ e $\vec{E}_{2,t}$ sono le componenti tangenziali dei rispettivi campi.

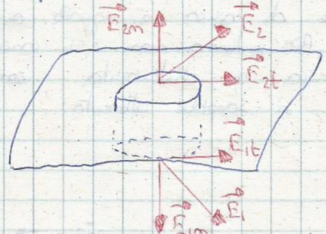
Essendo il campo conservativo si ha:

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_2 d\vec{s}_2 = E_{1,t}\, ds_1 - E_{2t}\, ds_2 = (E_{1t} - E_{2t})\, ds = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Quindi la componente tangenziale del campo $\vec{E}$ è continua quando si attraversa una distribuzione superficiale di carica. Invece se consideriamo:



E_{1n} e E_{2n} rappresentano le componenti normali dei rispettivi campi.

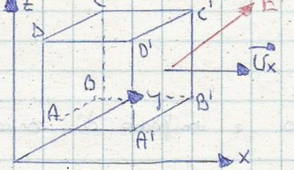
Si ha:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_1\, d\Sigma_1 + \vec{E}_2 \vec{u}_2\, d\Sigma_2 = -\vec{E}_1 \vec{u}_n\, d\Sigma_1 + \vec{E}_2 \vec{u}_2\, d\Sigma_2 =$$
$$= (E_{2n} - E_{1n})\, d\Sigma = \frac{\delta\, d\Sigma}{\varepsilon_0}$$

Quindi:

$$E_{2n} - E_{1n} = \delta/\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \delta/\varepsilon_0\, \vec{u}_n$$

In sostanza nell'attraversamento della superficie la componente normale del campo $\vec{E}$ subisce una discontinuità pari a δ/ε_0. Vediamo ora la legge di Gauss in forma differenziale. Consideriamo in merito la seguente figura:



Il flusso attraverso $A'B'C'D'$ è:

$$\vec{E}' \cdot \vec{u}_x\, dydz = E_x'\, dydz$$

Analogamente il flusso attraverso la faccia ABCD è:

$$\vec{E}(-\vec{u}_x)\, dydz = -E_x\, dydz$$

Complessivamente si ha:

$$(E_x' - E_x)\, dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dxdydz$$

Quindi il flusso attraverso tutta la superficie del parallelepipedo è:

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau$$

Poiché per Gauss si ha:

$$d\phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \rho(x,y,z) \frac{d\tau}{\varepsilon_0}$$

Quindi:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y,z)$$

Chiamiamo divergenza quell'operatore che si applica a una grandezza vettoriale e produce una grandezza scalare. Perciò:

$$\mathrm{Div}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y,z)$$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Il campo $\vec{E}$ ha divergenza diversa da zero solo nei punti in cui esiste una densità di carica. Nello spazio vuoto la divergenza di $\vec{E}$ è nulla. In particolare:

$$d\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau \quad \text{(vera per qualsiasi campo vettoriale).}$$

Esiste inoltre un teorema denominato teorema della divergenza il quale afferma che:

$$\phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

e cioè che il flusso del campo attraverso una superficie chiusa Σ è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso da Σ. Vediamo ora la divergenza in coordinate polari:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{1}{R \,\mathrm{Sen}\,\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\vartheta \,\mathrm{Sen}\,\vartheta) + \frac{1}{R \,\mathrm{Sen}\,\vartheta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

mentre in coordinate cilindriche si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R E_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Si definisce campo solenoidale quel campo che ha divergenza nulla. Pertanto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$$

Una proprietà del campo solenoidale è la seguente:

$$\phi(\vec{C}) = \oint \vec{C} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{C} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{C} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma_2 = 0$$

Cioè:

$$\phi(\vec{C}) = -\phi_1 + \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2.$$

In un campo solenoidale il flusso attraverso due superfici aventi lo stesso contorno e orientate concordemente, è uguale. Quindi ricapitolando abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \end{cases} \rightarrow \text{equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico.}$$

In particolare:

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla\nabla V = -\nabla^2 V = \rho/\varepsilon_0$$

Quindi:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho/\varepsilon_0 \rightarrow \text{equazione di Poisson}$$

Nello spazio vuoto diventa:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \text{equazione di Laplace.}$$

Parliamo ora della struttura dei conduttori. In particolare ci concentriamo sui metalli. In elettrostatica lo stato di conduttore in equilibrio è dato dalla seguente condizione media macroscopica:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{all'interno.}$$

Questa condizione comporta che all'interno di un conduttore non ci sono cariche, e questo ce lo dice il teorema di Gauss. Quindi un eccesso di carica in un conduttore può stare solo sulla superficie. Essa è distribuita con:

$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$$

Inoltre il potenziale del conduttore è costante in ogni punto del conduttore (superficie equipotenziale). Quindi:

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2) = V_0$$

Questo comporta che il campo in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore. Quindi si ha:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_n \rightarrow \text{teorema di Coulomb}$$

Il verso è uscente se la densità di carica è positiva, mentre è entrante se essa è negativa. Supponiamo ora di avere la seguente situazione: