

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow U = U_e + U_k = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -21,8 \cdot 10^{-19} \text{ J. } (< 0).$$

Abbiamo visto in precedenza che conoscendo il campo elettrostatico in ogni punto di un generico percorso, possiamo calcolare la d.d.p. tra due punti. Vogliamo ora calcolare il campo elettrostatico conoscendo il potenziale. Abbiamo visto che il potenziale è una funzione scalare, continua e derivabile. Consideriamo:



$$d\vec{R} = dx\vec{U}_x + dy\vec{U}_y + dz\vec{U}_z$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Per quest'ultima espressione abbiamo usato il **teorema del differenziale totale**. Quindi:

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = -\vec{E} \cdot d\vec{R} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Perciò possiamo scrivere: $\vec{E} = -\text{grad } V$

Il campo elettrostatico è uguale al gradiente del potenziale elettrostatico, con cambiato di segno.

Si ricorda che il **gradiente** è un operatore che applicato ad una grandezza scalare, produce una grandezza vettoriale. In coordinate cartesiane si può scrivere:

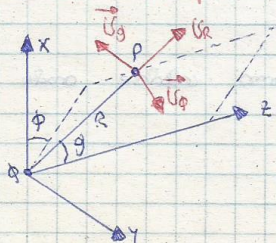
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{U}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{U}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{U}_z$$

Quindi: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{U}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{U}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{U}_z = -\vec{E}$

Siccome:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} \rightarrow V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} \rightarrow V_B - V_A = \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

Quest'ultima espressione va sotto il nome di **teorema del gradiente** secondo cui la variazione di una funzione scalare tra due punti A e B è data dall'integrale di linea del gradiente della funzione lungo un qualunque percorso che unisce A con B. Si noti inoltre che direzione modulo e verso del vettore $\vec{\nabla}$ non dipendono dal sistema di coordinate. Per esempio se usiamo le **coordinate polari** utili per simmetrie sferiche, abbiamo:



$$d\vec{s} = dr\vec{U}_r + r d\theta \vec{U}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{U}_\phi$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = (\vec{\nabla})_r dr + (\vec{\nabla})_\theta r d\theta + (\vec{\nabla})_\phi r \sin\theta d\phi$$

12)

$$DV = \frac{\partial V}{\partial R} \vec{U}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{U}_\phi$$

$$NB: \nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{U}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{U}_\phi$$

Quindi:

$$\begin{cases} E_R = -\frac{\partial V}{\partial R} \\ E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\phi = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{cases}$$

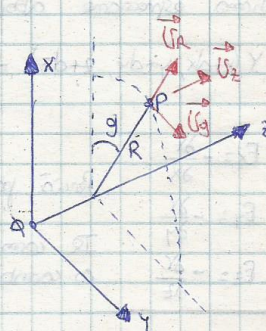
Un altro sistema di coordinate utile per problemi con simmetria rispetto a un asse è il sistema di coordinate cilindriche (R, θ, z) . Si ha:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{U}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{U}_z$$

$$DV = \frac{\partial V}{\partial R} \vec{U}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{U}_z$$

Quindi:

$$\begin{cases} E_R = -\frac{\partial V}{\partial R} \\ E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$



Consideriamo ora per esempio una carica q posta nel punto di coordinate x_0, y_0, z_0 . Vogliamo calcolare E a partire dal potenziale elettrostatico. Si ha:

$$P(x, y, z) \rightarrow V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{con } R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

Da:

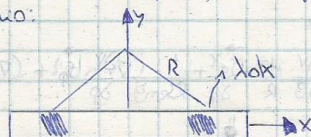
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (x-x_0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial R^{-1}}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (y-y_0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (z-z_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} [(x-x_0)\vec{U}_x + (y-y_0)\vec{U}_y + (z-z_0)\vec{U}_z] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{U}_R \end{aligned}$$

Ripetiamo ora i precedenti esempi, dove però ora vogliamo calcolare anche il potenziale elettrostatico; per esempio:



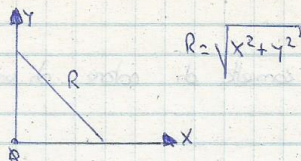
$z = \text{costante}$

$$dV = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2+y^2}}$$



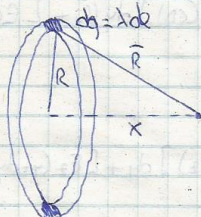
$$V = \int dV = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \int_{-R}^{+R} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) \right]_{-R}^{+R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(R + \sqrt{R^2+y^2}) - \ln(-R + \sqrt{R^2+y^2}) \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2+y^2}}{-R + \sqrt{R^2+y^2}} \right)$$



Quindi $E(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{R^2+y^2}}$.

Supponiamo ora di avere la seguente situazione:



$$dV = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow V = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

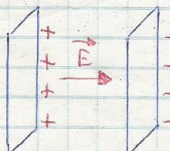
Per il calcolo del campo si ha:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial (R^2+x^2)^{-1/2}}{\partial x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}$$

Analogamente:

$$E_z = E_y = 0$$

Vediamo infine la seguente caso:



$$dV = -E dx \Rightarrow V(x) - V_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1)$$



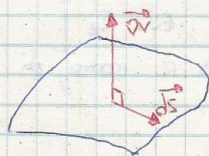
$$V(x) = V_1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1)$$

Poiché $h = x - x_1 \Rightarrow V(x) = V_1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$.

L'andamento del potenziale è visualizzabile ricorrendo al concetto di superficie equipotenziale. Una superficie equipotenziale è una superficie in cui il potenziale ha lo stesso valore. Quindi:

$$V(x, y, z) = \text{costante}$$

Si noti che il gradiente è ortogonale in ogni punto alla superficie equipotenziale. Perciò:

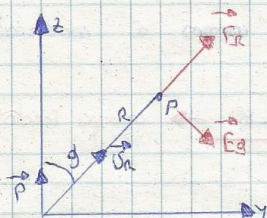


Le superfici equipotenziali risultano ortogonali alle linee di forza.

16

Il campo da nel piano $\vec{P}, \vec{U}_R$ verticalmente:

$$\vec{E} = E_R \vec{U}_R + E_\theta \vec{U}_\theta = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2\cos\theta \vec{U}_R + \sin\theta \vec{U}_\theta)$$



Il modulo ϵ :

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

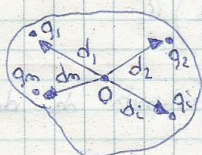
mentre θ ϵ :

$$\frac{1}{2} \tan\theta = \frac{E_\theta}{E_R} = \tan\theta$$

Esprimiamo anche il momento del dipolo in componenti polari:

$$\vec{P} = P\cos\theta \vec{U}_R - P\sin\theta \vec{U}_\theta$$

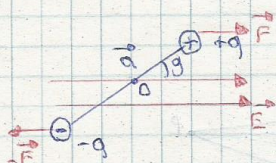
Se poi abbiamo un sistema di cariche del seguente tipo:



$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Consideriamo ora il caso di un dipolo formato da una carica $-q$ posta nel punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e da una carica $+q$ posta nel punto $P_2(x_1+a_1, y_1+a_1, z_1+a_1)$. Si ha:

$$\vec{a} = a_1 \vec{U}_x + a_2 \vec{U}_y + a_3 \vec{U}_z \Rightarrow \vec{P} = q \cdot \vec{a}$$



Se il dipolo si trova in una regione soggetta al campo elettrico, si ha:

$$U_e = qV(x_1+a_1, y_1+a_1, z_1+a_1) - qV(x_1, y_1, z_1)$$

Quindi:

$$V(x_1+a_1, y_1+a_1, z_1+a_1) = V(x_1, y_1, z_1) + \frac{\partial V}{\partial x} a_1 + \frac{\partial V}{\partial y} a_2 + \frac{\partial V}{\partial z} a_3$$

$$U_e = qa_1 \frac{\partial V}{\partial x} + qa_2 \frac{\partial V}{\partial y} + qa_3 \frac{\partial V}{\partial z} = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -P\cos\theta E$$

Graficamente si ha:



$\vec{\Pi}$ = momento della pnta.

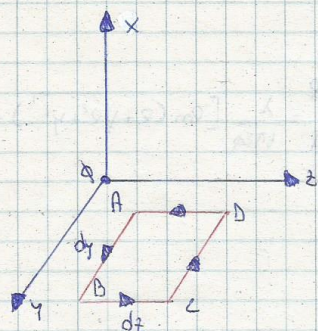
Si ha:

$$\vec{\Pi} = \vec{P} \times \vec{E}$$

(momento agente su un dipolo).

(1b)

Introduciamo ora il concetto di rotore di un campo vettoriale. Consideriamo la seguente situazione:



$$d\vec{r} = AB\vec{C}D$$

$$d\vec{r} = dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$d\vec{r} = \vec{E}(AB) \cdot \vec{AB} + \vec{E}(BC) \cdot \vec{BC} + \vec{E}(CD) \cdot \vec{CD} + \vec{E}(DA) \cdot \vec{DA}$$

Si noti però che: $\begin{cases} \vec{CD} = -\vec{AB} \\ \vec{DA} = -\vec{BC} \end{cases} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{E}(AB) \vec{AB} + \vec{E}(BC) \vec{BC} + \vec{E}(-AB)(-\vec{AB}) + \vec{E}(-BC)(-\vec{BC})$

Quindi:
$$d\vec{r} = [\vec{E}(AB) - \vec{E}(CD)] \vec{AB} + [\vec{E}(BC) - \vec{E}(DA)] \vec{BC} = [\vec{E}(AB) - \vec{E}(CD)] dy \vec{e}_y + [\vec{E}(BC) - \vec{E}(DA)] dz \vec{e}_z$$

Perciò:

$$d\vec{r} = [E_y(AB) - E_y(CD)] dy + [E_z(BC) - E_z(DA)] dz = [E_y(z) - E_y(z+dz)] dy + [E_z(y+dy) - E_z(y)] dz$$

Siccome:

$$E_y(z+dz) - E_y(z) = \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \quad \text{e} \quad E_z(y+dy) - E_z(y) = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy$$



$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dZx$$

Analogamente:

$$\begin{cases} d\vec{r}_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dz \\ d\vec{r}_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx \end{cases}$$

Considerando:

$$d\vec{r} \vec{u}_m = dZx \vec{u}_x + dZy \vec{u}_y + dZz \vec{u}_z$$



$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dZx + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dZy + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dZz$$

Chiamiamo questa espressione **rotore**.

Quindi:

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

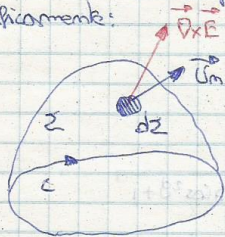
con $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$

Quindi: $d\vec{r} = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) dZ \vec{u}_m$

È importante anche il seguente teorema, che va sotto il nome di **teorema di Stokes**:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot dZ \vec{u}_m$$

cioè la circolazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa $\mathcal{C}$ è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avvolta per contorno $\mathcal{C}$. Graficamente:



Si noti che se un campo è conservativo si ha che:

$$\text{Rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \text{campo irrotazionale}$$

Si ricordi che solo se il campo è conservativo, si può esprimere come gradiente di una funzione scalare. In conclusione il rotore si applica ad una grandezza vettoriale e produce un'altra grandezza vettoriale. Vediamo ora il rotore nelle componenti polari:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (E_{\phi} \sin \theta) - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \phi} \right) \vec{u}_R + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial E_{\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial (R E_{\theta})}{\partial R} \right) \vec{u}_{\theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial (R E_{\theta})}{\partial R} - \frac{\partial E_{\phi}}{\partial \theta} \right) \vec{u}_{\phi}$$

In coordinate cilindriche si ha:

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial z} \right) \vec{u}_R + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial R} \right) \vec{u}_{\theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial (R E_{\theta})}{\partial R} - \frac{\partial E_{\phi}}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Vediamo ora il concetto di **dipolo elettrico**. Un dipolo elettrico è composto da due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a .



Si definisce **momento del dipolo** la seguente vettore:

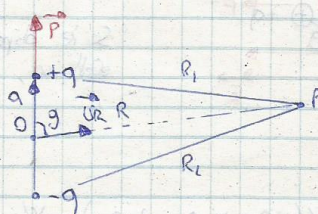
$$\vec{P} = q \cdot \vec{a}$$

Il potenziale generato dal dipolo elettrico è:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$\text{Se } R \gg a \rightarrow R_2 - R_1 \approx a \cos \theta, \quad R_1 R_2 \approx R^2$$

$$V(P) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$



NB: L'unità di misura del momento di un dipolo elettrico è Cm.

Quindi possiamo scrivere:

$$V(P) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Per il valore del campo si ha:

$$E_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$E_{\theta} = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Campo elettrico di un dipolo elettrico

$$E_{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$