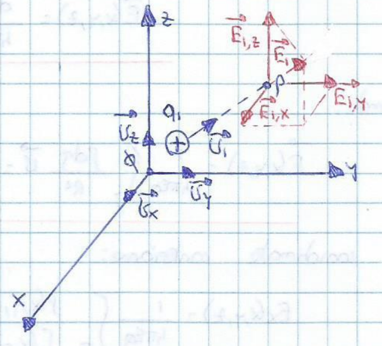
Quindi il campo prodotto da una carica puntiforme q_1 nel punto $P(x,y,z)$ è:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1^2}\vec{u}_1$$



In coordinate cartesiane:

$$E_{1,x}(x,y,z) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}}$$

$$E_{1,y}(x,y,z) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y-y_1}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}}$$

$$E_{1,z}(x,y,z) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z-z_1}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}}$$

Se la carica q_1 è positiva, il campo è uscente da q_1. Se q_1 è negativa il campo è entrante. Analogamente:

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum_i \frac{F_i}{q_0} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{R_i^2}\vec{u}_i$$

Quindi:

$$E_x(x,y,z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{3/2}}$$

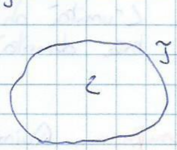
$$E_y(x,y,z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y-y_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{3/2}}$$

$$E_z(x,y,z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z-z_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{3/2}}$$

Perciò possiamo associare ad ogni punto un valore del campo elettrostatico $\vec{E}(x,y,z)$, indipendentemente dalla presenza di una carica di prova q_0. Quando q_0 viene posta nel punto $P(x,y,z)$ si ha:

$$\vec{F}(x,y,z) = q_0\vec{E}(x,y,z)$$

Il campo elettrostatico si misura in N/C (Newton/Coulomb). Consideriamo ora un corpo C di volume τ:



definiamo densità spaziale di carica la seguente espressione:

$$dq = \rho(x,y,z)\,d\tau \qquad d\tau = dx\,dy\,dz$$

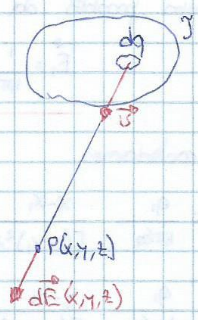
$$\int dq = \int \rho(x,y,z)\,d\tau \Rightarrow q = \int_\tau \rho(x,y,z)\,d\tau$$

L'unità di misura di tale densità è C/m^3.

4

Quindi si può anche scrivere:

$$d\vec{E}(x,y,z) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u} = \frac{\rho\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}$$



Quindi:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho\, d\tau}{R^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(x',y',z')\, dx'dy'dz'}{R^2}$$

In coordinate cartesiane:

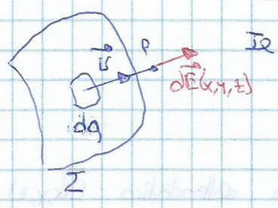
$$E_x(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(x',y',z')(x-x')\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(x',y',z')(y-y')\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$E_z(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(x',y',z')(z-z')\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

Si definisce poi densità superficiale di carica la seguente espressione:

$$dq = \sigma(x,y,z)\,d\Sigma \Rightarrow \int dq = \int_\Sigma \sigma(x,y,z)\,d\Sigma \Rightarrow q = \int_\Sigma \sigma(x,y,z)\,d\Sigma$$



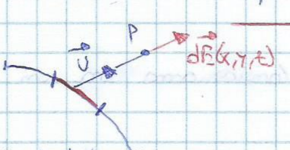
Il campo dovuto a tale distribuzione è:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \frac{\sigma\, d\Sigma}{R^2}\vec{u}$$

L'unità di misura di tale densità è C/m^2.

Si definisce infine densità lineare di carica la seguente espressione:

$$dq = \lambda(x,y,z)\,dl \Rightarrow \int dq = \int_l \lambda(x,y,z)\,dl \Rightarrow q = \int_l \lambda(x,y,z)\,dl$$



$dq = \lambda(x',y',z')\,dl$

Il campo è:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda\, dl}{R^2}\vec{u}$$

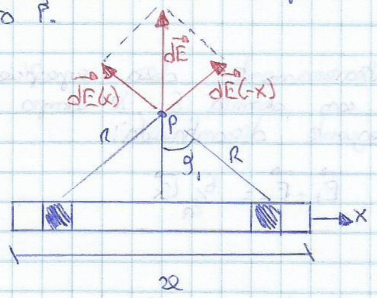
L'unità di misura di tale densità è C/m.

Quando tali densità sono costanti si parla di distribuzioni uniformi. Quindi:

$$q = \rho(x,y,z)\int_\tau d\tau \Rightarrow q = \rho(x,y,z)\,\tau \quad , \quad q = \lambda(x,y,z)\int_l dl \Rightarrow q = \lambda(x,y,z)\,l.$$

$$q = \sigma(x,y,z)\int_\Sigma d\Sigma \Rightarrow q = \sigma(x,y,z)\,\Sigma$$

Vediamo ora l'esempio del filo di lunghezza $2l$ parallelo all'asse x, che possiede una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua lunghezza. Vogliamo calcolare $\vec{E}$ nel punto P.



Innanzitutto il filo è uniformemente carico quindi:

$$q = \lambda 2l$$

Consideriamo per simmetria due tratti infinitesimali di filo:

$$dq = \lambda dx \Rightarrow d\vec{E}(0,y) = \frac{2\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_y \cos\theta$$

Infatti: $d\vec{E}(0,y) = 2d\vec{E}(x) = 2\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_y\cos\theta$

Si noti però che:

$$R\cos\theta = y \Rightarrow x' = y\,\mathrm{tg}\,\theta \quad e \quad dx' = \frac{y\,d\theta}{\cos^2\theta} \qquad NB: \frac{x'}{y} = \frac{R\,\mathrm{sen}\,\theta}{R\cos\theta} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta$$

$$\Downarrow$$

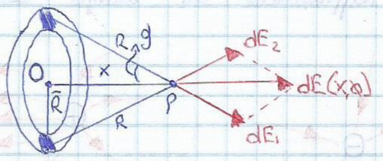
$$d\vec{E}(0,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\cos\theta\, d\theta\, \vec{u}_y$$

Integrando si ottiene:

$$\vec{E}(0,y) = \frac{\lambda\vec{u}_y}{2\pi\varepsilon_0 y}\int_0^{\theta_1}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\mathrm{sen}\,\theta_1 \qquad NB: \theta_1 = \mathrm{arcsen}\left(l/\sqrt{y^2+l^2}\right).$$

Vediamo ora l'esempio dell'anello di $\bar{R}$ come raggio con densità di carica distribuita uniformemente.

$$\lambda = q/2\pi\bar{R} \Rightarrow dq = \lambda dl$$



Quindi:

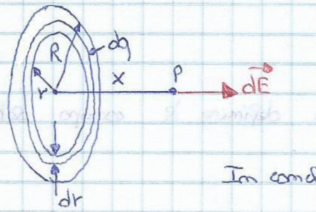
$$dE_x(x) = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda\cos\theta\,\vec{u}_x}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_l dl = \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}2\pi\bar{R}\,\vec{u}_x$$

Poniamo $R^2 = \bar{R}^2 + x^2$ e $\cos\theta = x/\sqrt{\bar{R}^2+x^2}$ $\Rightarrow \vec{E}(x) = \frac{\lambda\bar{R}}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(\bar{R}^2+x^2)^{3/2}}\vec{u}_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(\bar{R}^2+x^2)^{3/2}}\vec{u}_x$

Se invece abbiamo un disco che possiede una carica q distribuita uniformemente su tutta la superficie?



$$dq = \sigma d\Sigma \quad con \quad d\Sigma = 2\pi r\,dr$$

$$\Downarrow$$

$$d\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}\vec{u}_x = \frac{qx}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}\vec{u}_x$$

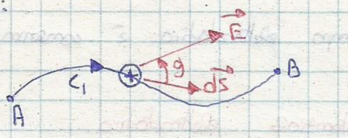
In conclusione:

$$\vec{E}(x) = \int_0^R \frac{\sigma x\vec{u}_x}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x\vec{u}_x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \ldots\ldots$$

Quindi la forza che agisce su una carica si esprime sempre come prodotto di una carica per un certo campo elettrico. Tale forza viene detta forza elettrostatica. È risaputo poi che il lavoro è il prodotto della forza per lo spostamento. Quindi:

$$dL = \vec{F}\cdot\vec{ds} \Rightarrow dL = \vec{E}\cdot q_0\cdot\vec{ds}$$

Quindi:



$$dL_1 = \vec{F}\cdot\vec{ds} = q_0\vec{E}\cdot\vec{ds} = q_0 E\cos\theta\, ds$$

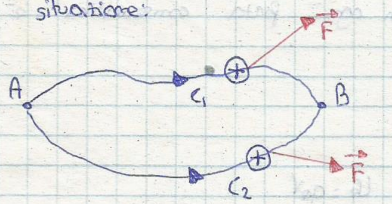
$$\Downarrow$$

$$L_1 = \int_{C_1}\vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{C_1} q_0\vec{E}\cdot\vec{ds} = q_0\int_{C_1}\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

Si noti che quest'ultimo integrale è un integrale di linea. Si definisce tensione elettrica tra i punti A e B lungo il percorso C_1 la seguente espressione:

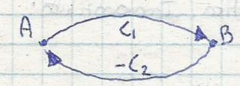
$$T_1 = \int_{C_1}\vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{L_1}{q_0}$$

Si noti come la tensione sia una grandezza scalare. L'unità di misura della forza elettrostatica è N/C, mentre l'unità di misura della tensione è il volt. Consideriamo ora la seguente situazione:



$$C_1 \neq C_2 \Rightarrow T_1 \neq T_2$$

Per un percorso chiuso invece si ha:



$$L = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot\vec{ds} + \int_{-C_2}\vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot\vec{ds} - \int_{C_2}\vec{F}\cdot\vec{ds} = L_1 - L_2$$

Quindi in generale il lavoro, in un percorso chiuso, è diverso da zero. Quindi:

$$L = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{ds} = q_0\oint_C \vec{E}\cdot\vec{ds} = q_0\mathcal{E}$$

$\mathcal{E}$ è una grandezza scalare e prende il nome di forza elettromotrice (f.e.m.). Quindi:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\cdot\vec{ds}$$

È risaputo che per le forze conservative, il lavoro dipende solo dagli stati iniziale e finale, e non dal particolare percorso. Quindi:

$$L(C_1) = L(C_2) = \dots = L(C_n)$$

In questo caso il lavoro lungo un percorso chiuso è zero. Siccome le forze elettrostatiche e quindi il campo elettrostatico sono conservativi, si ha che:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

Se scriviamo:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = f(B) - f(A)$$, visto che il campo elettrostatico è conservativo

all'opposto di questa funzione diamo il nome di potenziale elettrostatico.

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$ → differenza di potenziale (d.d.p)

Quindi:

$$L = q_0 \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0 (V_A - V_B) = -q_0 \Delta V$$

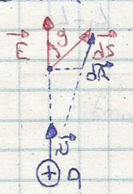
Il lavoro svolto dalla forza elettrica per portare la carica q_0 da A a B è dato dal prodotto di q_0 per la d.d.p tra A e B. Ricordandosi che per ogni forza conservativa è associata un'energia potenziale, si ha:

$$L_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V \quad o \quad U_e = q_0 V$$

Si noti però che in generale un campo elettrico come una forza elettrica, non sono conservativi. Dimostriamo ora che il campo elettrostatico è conservativo. Innanzitutto:



$$dL = q_0 \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\, d\vec{s}}{R^2} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dR}{R^2}$$

NB: $dR = \vec{u}\, d\vec{s}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dR}{R^2}$$

Si noti che la funzione integranda dipende solo da R e non dal particolare percorso.
Quindi:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B dR/R^2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[1/R_B - 1/R_A\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_B} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_A}$$

Si ricordi però che:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$ → si dimostra anche che la forza elettrostatica è centrale.

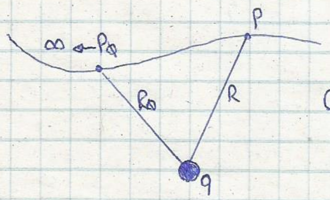
Analogamente:

$$U_e(A) - U_e(B) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 R_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

Si noti che per distanze molto grandi (∞), si ha che:

$$V(\infty) = U(\infty) = F(\infty) = E(\infty) = 0$$

Quindi se abbiamo:



$$\int_R^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{s} = V(R) - \cancel{V(\infty)} = V(R)$$

Quindi: $V(R) = \int_R^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow U(R) = q_0 V(R) = q_0 \int_R^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

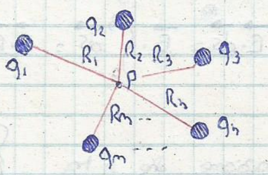
Per il principio di sovrapposizione degli effetti si estendono i precedenti risultati:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\Sigma_i \vec{E}_i\right) d\vec{s} = \Sigma_i \int_A^B \vec{E}_i\, d\vec{s} = \Sigma_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\, \vec{u}_i\, d\vec{s}$$

Quindi:

$$V_A - V_B = \Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_{i,A}} - \Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_{i,B}} \quad , \quad L = q_0(V_A - V_B) = \Sigma_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_{i,A}} - \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_{i,B}} = -\Delta U_e$$

$$V(x,y,z) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$



SISTEMA DISCRETO DI CARICHE.

Usando le coordinate cartesiane otteniamo:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma_i \frac{q_i}{\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{1/2}}$$

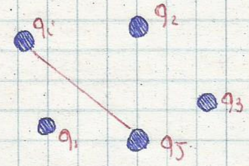
e sfruttando i tre tipi di densità visti precedentemente si ha:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_s \frac{\lambda\, ds}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_s \frac{\lambda(x',y',z')\, ds}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Sigma \frac{\delta\, d\Sigma}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Sigma \frac{\delta(x',y',z')\, d\Sigma}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_J \frac{\rho\, dJ}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_J \frac{\rho(x',y',z')\, dJ}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

Vediamo ora il significato dell'energia potenziale U_e. Se le cariche sono dello stesso segno, l'energia potenziale $U_e(R)$ è positiva ed è positivo il lavoro elettrostatico. Viceversa se le cariche sono di segno opposto, sia il lavoro elettrostatico che l'energia potenziale sono negativi. Consideriamo ora un sistema di cariche del seguente tipo:



Abbiamo: $U_e(\text{SISTEMA}) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_{i,j}}$

$$\Downarrow$$

$$U_e(\text{SISTEMA}) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} q_i V_{i,j}$$

Quando una particella con carica q_0 e massa m posta nella posizione iniziale A, passa alla posizione finale B, la sua energia cinetica cambia; infatti ricordandosi il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2 = L$$

$$\Downarrow$$

$$L = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) = q_0 V_A - q_0 V_B$$

$$\Downarrow$$

sostituzione: $q_0 V_A - q_0 V_B = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2}m v_B^2 + q_0 V_B$

Quest'ultima espressione mi rappresenta il principio di conservazione dell'energia meccanica. Quindi:

$$E = E_c + U_e = \frac{1}{2}m v^2 + q_0 V$$

Una situazione particolare è la seguente:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{s} = \vec{E}\cdot\vec{R}_{AB} = E(z_B - z_A)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} V_A = -E z_A + \text{costante} \\ V_B = -E z_B + \text{costante} \end{cases}$$

Quindi questa è la situazione che si ha quando nella regione in cui avviene il moto il campo è uniforme cioè è costante in modulo direzione e verso. Quindi in generale si ha:

$$V(z) = -Ez + \text{costante}$$

Per esempio nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'elettrone compie un'orbita circolare di raggio $R = 0{,}53\cdot10^{-10}\,m$ attorno al protone. Vogliamo calcolare l'energia di legame dell'atomo di idrogeno. Innanzitutto il potenziale elettrico del protone è:

$$V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R} \simeq 27{,}2\,V$$

Quindi:

$$U_e = -eV = -4{,}35\cdot10^{-18}\,J.$$

Si noti però che sull'elettrone la forza: $m a_n = m\frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Perciò: