$$E_y = E_0 \cos\vartheta \cos(kx + k_s d - \omega t) \quad , \quad E_z = E_0 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}(kx + k_s d - \omega t)$$

L'onda è polarizzata ellitticamente con gli assi dell'ellisse paralleli a y e z. Queste lamine vengono dette **quarto d'onda** e trasformano un'onda piana polarizzata rettilineamente in una polarizzata ellitticamente in generale e in una polarizzata circolarmente quando l'angolo tra $\vec{E}$ e l'asse ottico è $\vartheta = \pi/4$. Consideriamo adesso uno sfasamento multiplo dispari di π:

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi$$

$$d = \frac{\lambda}{2(n_s - n_0)}(2m+1) \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

La lamina si chiama **mezz'onda**. Essa trasforma un'onda polarizzata rettilineamente in un'onda polarizzata rettilineamente con angolo $-\vartheta$, con l'asse ottico della lamina. Quindi:

$$E_y = E_0 \cos\vartheta \cos(kx + k_s d - \omega t)$$

$$E_z = - E_0 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}(kx + k_s d - \omega t)$$

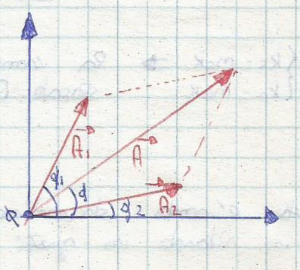
Si ricordi infine che l'effetto della lamina si ha solo sullo stato di polarizzazione di un'onda piana polarizzata. Se un'onda non è polarizzata la lamina non ha nessun effetto. Quando la differenza di fase tra due onde in un qualsiasi punto è costante nel tempo le sorgenti delle due onde si dicono **coerenti**. Quando invece questa circostanza non si verifica, le sorgenti sono **incoerenti**. Chiamiamo **interferenza** quel fenomeno che si ha quando si sovrappongono due onde emesse da due o più sorgenti coerenti. Supponiamo di avere delle onde che si propaghino entrambe lungo l'asse x, che vibrino lungo la stessa direzione e che il punto P disti x_1 dalla sorgente dell'onda e x_2 dalla seconda sorgente dell'onda. Abbiamo:

$$\xi_1 = A_1 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$



$$\text{con: } \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} \\ \delta = \varphi_1 - \varphi_2 = \phi_1 - \phi_2 + k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

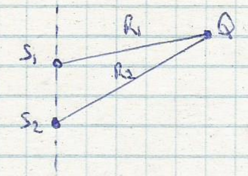
L'intensità d'onda misurata nel punto P è:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

Nel caso in cui $A_1 = A_2 = A_0 \Rightarrow I = 2I_0(1 + \cos\delta) = 4I_0\cos^2\delta/2$.

L'ampiezza della somma dipende dalla differenza di fase. Il valore massimo della somma si ha quando le onde sono in fase, il minimo si ha quando le onde sono in opposizione di fase. Si ricordi inoltre che l'interferenza è un fenomeno

stazionario nel senso che è funzione della posizione del punto ma non del tempo.
Consideriamo ora due sorgenti coerenti S_1 e S_2 di onde armoniche sferiche:

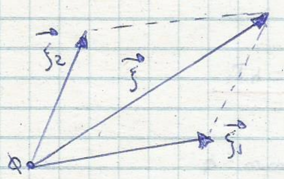


Queste hanno la stessa pulsazione ω e si propagano in un mezzo indefinito isotropo con velocità v. Quindi:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{2\pi v}{\omega} \\ k = \omega/v = 2\pi/\lambda . \end{cases}$$

Si ha:
$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_{01}\cos(kR_1 - \omega t) = \dfrac{\xi_0}{R_1}\cos(kR_1 - \omega t) \\ \xi_2 = \xi_{02}\cos(kR_2 - \omega t) = \dfrac{\xi_0}{R_2}\cos(kR_2 - \omega t) \end{cases}$$

L'ampiezza dell'onda risultante nel punto Q è:



$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\delta}$$

e la differenza costante di fase è:

$$\delta = k(R_2 - R_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(R_2 - R_1)$$

L'intensità nel punto Q è:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(R_2 - R_1)\right)$$

con:
$$\begin{cases} I_1 = P/4\pi R_1^2 \\ I_2 = P/4\pi R_2^2 \end{cases}$$

L'interferenza è costruttiva nei punti in cui le onde sono in fase. Ciò si verifica quando:

$$\delta = 2m\pi \quad , \quad \Delta R = R_2 - R_1 = m \qquad e \ \lambda m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

In questo caso l'intensità assume il valore massimo:

$$I_{MAX} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

L'interferenza si dice distruttiva nei punti in cui le onde sono in opposizione di fase e ciò comporta che:

$$\delta = (2m'+1)\pi \quad , \quad \Delta R = R_2 - R_1 = (2m'+1)\lambda/2 \qquad e \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Il valore minimo dell'intensità è:

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Si noti che le superfici di massima intensità $R_2 - R_1 = m\lambda$ si dicono ventrali, mentre quelle di minima intensità $R_2 - R_1 = (2m'+1)\lambda/2$ vengono dette nodali. Supponiamo ora che la distanza tra le due sorgenti sia d, e il punto Q si trovi a distanza R dal punto medio tra S_1 e S_2, molto maggiore di d. Abbiamo:

$$R_1 = R_2 = R \Rightarrow R_2 - R_1 = d \operatorname{sen}\vartheta \quad , \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\vartheta$$

Quindi:

$$\xi_Q = \sqrt{2\xi_{01}^2 (1+\cos\delta)} = 2\xi_{01}\cos\delta/2 = 2\xi_{01}\cos\frac{\pi d \operatorname{sen}\vartheta}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$I(R,\vartheta) = 4I_1\cos^2\delta/2 = 4I_1\cos^2\frac{\pi d\operatorname{sen}\vartheta}{\lambda} \quad , \quad I_1 = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Le condizioni di massima e minima intensità diventano:

MAX: $\operatorname{sen}\vartheta = m\dfrac{\lambda}{d}$ con $m = 0, \pm1, \pm2, \dots \Rightarrow I_{max} = 4I_1$

MIN: $\operatorname{sen}\vartheta = (2m'+1)\lambda/2d$ con $m' = 0, \pm1, \pm2, \dots \Rightarrow I_{min} = 0$

Si noti che nel caso di sorgenti incoerenti, cioè se la differenza di fase intrinseca varia casualmente nel tempo il fenomeno studiato è molto diverso. Nel caso di sorgenti incoerenti non c'è più interferenza. La coerenza inoltre opera una ridistribuzione della potenza complessiva:

$$P_R = 2P$$

che viene chiaramente concentrata in certe direzioni e rarefatta in altre. I risultati visti si estendono naturalmente a un numero qualsiasi di sorgenti a due a due incoerenti per cui:

$$I_R = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad e \quad I_R = NI_1$$

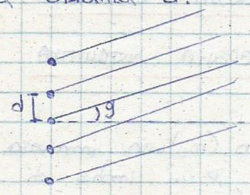
Vediamo adesso le onde luminose. Qui l'onda emessa da una sorgente ordinaria è la risultante dei pacchetti d'onda emessi dai singoli atomi. Le rispettive fasi sono distribuite in maniera casuale. L'onda quindi non è polarizzata. Quindi sia le onde provenienti da due punti di una sorgente estesa, che le onde provenienti da due sorgenti diverse risultano essere incoerenti e non danno luogo a fenomeni di interferenza. La differenza di fase dovuta ad una differenza di cammino geometrico è:

$$\delta = k_2R_2 - k_1R_1$$

Rispetto al vuoto si ha: $\delta = k_0(n_2R_2 - n_1R_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n_2R_2 - n_1R_1)$

Il prodotto nR prende il nome di cammino ottico. Nel vuoto si ha $n_1 = n_2 = 1$.

Consideriamo ora N sorgenti di onde sferiche e coerenti disposte su una retta e equispaziate di una distanza d.



Tra due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la differenza di fase:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \vartheta$$

Calcoliamoci l'ampiezza risultante ξ_R, ricordandoci che:

$$\xi_1 = 2\rho \operatorname{sen} \delta/2 \qquad \text{dove } \rho = \text{raggio.}$$

Quindi: $\xi_R = 2\rho \operatorname{sen} \frac{N\delta}{2} \Rightarrow \xi_R = \xi_1 \dfrac{\operatorname{sen} N\delta/2}{\operatorname{sen} \delta/2}$

Perciò l'intensità d'onda risultante nel punto Q è proporzionale al quadrato di ξ_R.

$$I_R(\vartheta) = I_1 \left(\frac{\operatorname{sen} N\delta/2}{\operatorname{sen} \delta/2} \right)^2 = I_1 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{N\pi d \operatorname{sen}\vartheta}{\lambda}}{\operatorname{sen} \frac{\pi d \operatorname{sen}\vartheta}{\lambda}} \right)^2$$

Si può facilmente notare che l'intensità I_R presenta nell'intervallo $0 \le \vartheta \le \pi/2$ un certo numero di massimi principali con:

$$\frac{\pi d \operatorname{sen}\vartheta}{\lambda} = m\pi \Rightarrow d \operatorname{sen}\vartheta = m\lambda \Rightarrow \operatorname{sen}\vartheta = m\lambda/d \qquad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{max} = N^2 I_1 \quad \text{e} \quad \xi_{max} = N \xi_1$$

Per quanto riguarda i minimi si ha:

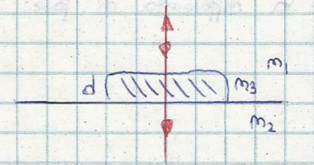
$$\frac{N\pi d \operatorname{sen}\vartheta}{\lambda} = m'\pi \Rightarrow d \operatorname{sen}\vartheta = m' \frac{\lambda}{N} \lambda \quad , \quad \operatorname{sen}\vartheta = m' \frac{\lambda}{Nd}$$

Si noti che la posizione dei massimi principali in cui si concentra la maggior parte della potenza emessa è determinata dal rapporto λ/d e non dipende dal numero di sorgenti. L'intensità dei massimi principali dipende dal numero delle sorgenti. Quindi l'interferenza tra due onde prodotte da sorgenti coerenti opera una ridistribuzione dell'energia che viene soprattutto concentrata nelle regioni corrispondenti ai massimi principali. Inoltre che le sorgenti siano o meno coerenti la potenza è sempre N·P.
Consideriamo ora il caso di lamina sottile trasparente con un indice di rifrazione n_2 immersa a sua volta in un fluido con indice di rifrazione n_1. Si ha:

$\delta = 2\pi m$, $d = (2m-1)\dfrac{\lambda_0}{4n_2}$ con $m = 1, 2, \dots$ → INTERFERENZA COSTRUTTIVA

$\delta = (2m'+1)\pi$, $d = m' \dfrac{\lambda_0}{2n_2}$ con $m' = 0, \pm 1, \dots$ → INTERFERENZA DISTRUTTIVA

Supponiamo invece che la superficie superiore di una lastra di vetro (n_2) sia immersa nell'aria (n_1) e ricoperta da una sottile pellicola trasparente spessa d, il cui indice di rifrazione è n_3.



Sia: $n_1 < n_3 < n_2$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \\ R_2 = \dfrac{n_3 - n_2}{n_2 + n_3} \end{cases}$$

Quindi:

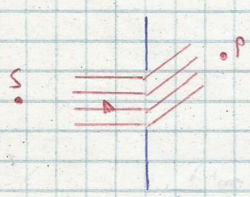
$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} =$$
$$= \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + 2\sqrt{\bar{R}_1\bar{R}_2}\cos\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0}$$

L'interferenza è costruttiva se: $\dfrac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = 2m\pi$, $d = m\dfrac{\lambda_0}{2n_3}$ e $m = 1, 2, \dots$

Viceversa l'interferenza è distruttiva se:

$$\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = (2m'+1)\pi \ , \ d = (2m'+1)\frac{\lambda_0}{4n_3} \ , \ m' = 0, 1, 2, \dots$$

Parliamo ora della diffrazione. La diffrazione è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando un'onda incontra nel suo percorso un ostacolo. Gli effetti della diffrazione sono tanto più vistosi quanto grande è l'ostacolo rispetto alla lunghezza d'onda. Consideriamo la seguente diffrazione:



DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER

Sia $a = AB$ la larghezza del foro rettangolare, e sia $L \gg a$ la sua lunghezza.

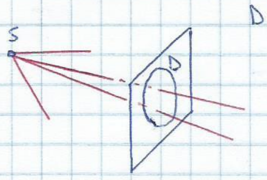
Supponiamo che sulla fenditura incida un'onda piana di lunghezza d'onda λ. Suddividiamo la stessa in N strisce parallele di larghezza Δy. Ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con l'ampiezza ΔE al campo elettrico risultante E. I contributi ΔE relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto P la differenza di fase:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \operatorname{sen}\theta$$

Per il calcolo di E si procede come nel caso di N sorgenti e otteniamo così:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$$

Abbiamo visto che la luce sostanzialmente ha natura ondulatoria. Partiamo ora dall'ipotesi che la luce emessa da una sorgente si propaghi in linea retta all'interno di un mezzo trasparente omogeneo e isotropo. Abbiamo già detto che il termine omogeneo indica la costanza della densità mentre il termine isotropo indica che il comportamento della luce è lo stesso in tutte le direzioni. Per esempio il vetro, l'aria e l'acqua sono mezzi di questo tipo. Il percorso seguito dalla luce viene tracciato attraverso raggi. Si guardi in merito il seguente esempio:

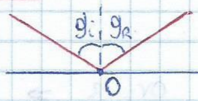


D = diaframma.

Abbiamo visto che la luce emessa da una sorgente può essere monocromatica quando essa ha una ben precisa lunghezza d'onda, oppure può essere policromatica cioè può avere più lunghezze d'onda.

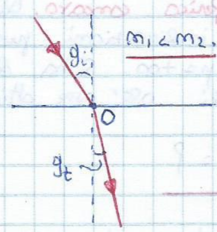
Abbiamo anche parlato della riflessione. In particolare un raggio si può riflettere su una particolare superficie metallica, e indicando con ϑ_R l'angolo di riflessione si ha:

$$\vartheta_i = \vartheta_R$$



Ma da un raggio incidente nasce sia un raggio riflesso che un raggio trasmesso. Indicando con ϑ_t l'angolo di trasmissione si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta_t}{\operatorname{sen}\vartheta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$



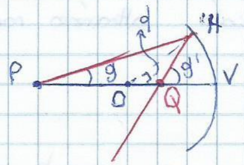
Questo fenomeno prende il nome di rifrazione e le grandezze n_1 e n_2 sono indici di rifrazione assoluti, rispettivamente del primo e del secondo mezzo. Per definizione:

$n = \frac{c}{v}$ dove c è la velocità della luce nel vuoto, e v è la velocità della luce nel mezzo.

Abbiamo anche detto che per $n_1 > n_2$ esiste un angolo limite ϑ_L tale che $\vartheta_t = 90°$. Quindi:

$$\operatorname{sen}\vartheta_L = \frac{n_2}{n_1}, \quad \vartheta_L = \operatorname{arcsen} n_2/n_1$$

Abbiamo anche accennato alla legge di Snell. Un fatto importante di questa legge è che se si inverte il verso di propagazione della luce, semplicemente si scambiano tra loro i vari angoli. Questa proprietà è nota come proprietà di reversibilità. Cerchiamo ora di ricostruire immagini di differenti oggetti. Chiamiamo corpo l'oggetto di cui intendiamo formare l'immagine. Quando i raggi uscenti dal corpo si incontrano in un solo punto dell'immagine siamo in presenza dello stigmatismo. In realtà lo stigmatismo è difficile da ottenere. Chiamiamo poi specchi quelle particolari superfici sulle quali avviene soltanto la riflessione. Si chiamano invece diottri quelle superfici su cui avviene la trasmissione della luce da un mezzo all'altro. Quando da un unico oggetto possiamo avere più immagini siamo di fronte ad un particolare fenomeno chiamato astigmatismo. Consideriamo ora uno specchio concavo e poniamo un oggetto P puntiforme sull'asse dello specchio in questa maniera:



Il raggio incide lo specchio nel punto H. Per una nota proprietà dei triangoli abbiamo:

$$\vartheta + \vartheta_i = \varphi \quad e \quad \varphi + \vartheta_i = \vartheta'$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta + \vartheta' = 2\varphi$$

Quest'ultima relazione vale sempre.
In particolare se l'arco HV viene confuso con il segmento perpendicolare da H all'asse ottico, possiamo scrivere:

$$h = PV\,tg\,\vartheta = PV\vartheta \quad oppure \quad h = QV\,tg\,\vartheta' = QV\vartheta' \quad oppure \quad h = OV\,tg\,\varphi = OV\varphi$$

Quindi:

$$PV = p, \; QV = -q, \; OV = -R \Rightarrow \vartheta = h/p, \; \vartheta' = \frac{h}{-q}, \; \varphi = h/{-R}$$

$$\Downarrow$$

Quest'ultima equazione prende il nome di equazione dello specchio sferico concavo. Questa equazione vale per tutte le inclinazioni purché piccole. Supponiamo ora che $p = +\infty$. Si ha che i raggi incidenti sono paralleli all'asse ottico. Quindi si può scrivere:

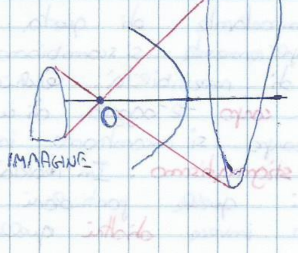
$$1/p - 1/q = -2/R$$

$$q = R/2 = f$$

Il punto F è a metà strada tra O e V e viene detto fuoco. Per essere più precisi la distanza $f = -FV$ viene detta distanza focale. Quindi:

$$1/p - 1/q = 1/f$$

Si ricordi che O è il centro di curvatura. Quando P si avvicina ad O, Q si avvicina ad O. e quando P è in O anche Q cade in O. In particolare quando P è in F, l'immagine si forma all'infinito. Si consideri ora la seguente situazione:



Si noti che l'immagine viene capovolta. Si noti anche che l'immagine dell'immagine capovolta è differente rispetto a quella originale. Quindi chiamiamo ingrandimento trasversale il rapporto tra la lunghetta del segmento QQ' (y) e la lunghezza del segmento PP' (x):

$$I = y/x$$