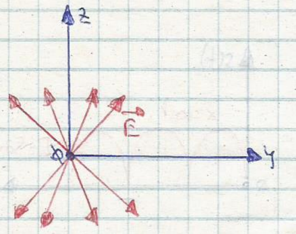
Se ora la differenza di fase δ varia in maniera casuale, non si può stabilire una precisa legge di variazione per la direzione di $\vec{E}$. Quindi l'onda risulta non polarizzata. Una luce emessa dal sole o da una lampadina è un'onda elettromagnetica non polarizzata.



La presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ in una regione di spazio comporta una distribuzione di energia con densità u. In un mezzo omogeneo abbiamo:

$$\begin{cases} u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \\ u_m = \frac{B^2}{2\mu} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}$$

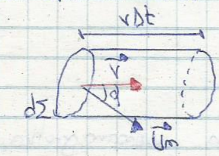
Per un'onda elettromagnetica piana si ha:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = u_e$$

$$\Downarrow$$

$$u = 2u_e = \varepsilon E^2$$

Quindi l'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà al campo magnetico. Quanto detto vale anche per onde non piane. Consideriamo ora:



$$dU = u\,d\tau = u\,d\Sigma\cos\theta\, v\,dt = \varepsilon E^2 v\cos\theta\, d\Sigma\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$dP = \varepsilon E^2 v\cos\theta\, d\Sigma$$

Definiamo il vettore $\vec{S}$ così: $\vec{S} = \varepsilon E^2 \vec{v}$

Questo vettore ha la proprietà che il suo flusso attraverso la superficie $d\Sigma$, fornisce la potenza istantanea attraverso $d\Sigma$:

$$dP = \vec{S}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \varepsilon E^2 v\cos\theta\, d\Sigma = \varepsilon E^2 v\, d\Sigma_0 = S\, d\Sigma_0 \qquad \text{con } d\Sigma_0 = d\Sigma\cos\theta.$$

Quindi si può anche scrivere: $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} \Rightarrow dP = \frac{1}{\mu}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$

$$\Downarrow$$

$$P = \int_\Sigma \vec{S}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \int_\Sigma \frac{1}{\mu}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma$$

Il vettore $\vec{S}$ prende anche il nome di vettore di Poynting. Si noti che esso ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Applichiamo quanto visto ad un'onda piana polarizzata rettilineamente. Quindi:

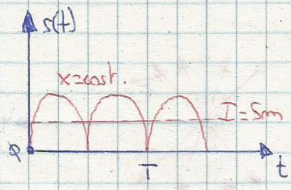
$$E = E_0\sin(kx-\omega t) \Rightarrow S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon v E_0^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

Però è importante più calcolare il flusso medio che quello istantaneo in quanto la pulsazione delle onde elettromagnetiche è elevata. Quindi:

$$S_m = \varepsilon v (E^2)_m = \varepsilon v \frac{1}{t}\int_0^t E_0^2 \sin^2(kx-\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2$$

Quindi in conclusione l'intensità trasportata da un'onda elettromagnetica piana armonica polarizzata rettilineamente vale:

$$I = S_m = \varepsilon v (E^2)_m = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 = \varepsilon v E_{eff}^2$$



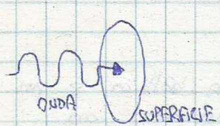
Possiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} I_y = \frac{1}{2}\varepsilon v E_{0y}^2 \\ I_z = \frac{1}{2}\varepsilon v E_{0z}^2 \end{cases} \Rightarrow I = I_y + I_z = \frac{1}{2}\varepsilon v \left(E_{0y}^2 + E_{0z}^2\right)$$

Tale intensità totale è indipendente dallo sfasamento e dallo stato di polarizzazione. Ricordandosi che:

$$\varepsilon v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}\,\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z} = \frac{n}{Z_0} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\frac{n}{Z_0}E_0^2 = \frac{n}{Z_0}E_{eff}^2$$

Consideriamo ora:



Chiamiamo pressione di radiazione quella pressione media che viene esercitata dall'onda sulla superficie Σ:

$$P_{rad} = \frac{I}{c}$$

Si noti che, come vedremo, esistono due casi limite:

1) assorbimento → quando la superficie assorbe tutta l'energia elettromagnetica incidente.

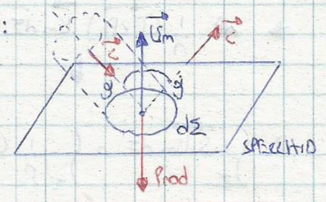
2) perfetta riflessione → quando la superficie non assorbe energia.

In quest'ultimo caso si ha:

$$P_{rad} = \frac{2I}{c}$$

NB: c è la velocità della luce.

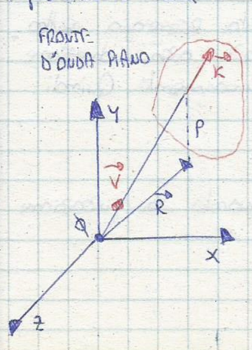
Vediamo ora il seguente caso:



ASSORBIMENTO COMPLETO $P_{rad} = \frac{I}{c}\cos^2\theta$

RIFLESSIONE COMPLETA $P_{rad} = \frac{2I}{c}\cos^2\theta$

Riprendiamo ora in considerazione l'onda piana armonica che si propaga in qualunque direzione:



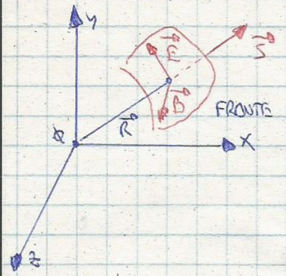
$$E = E_0 \,\mathrm{sen}(\vec{k}\cdot\vec{R} - \omega t)$$

COORDINATE CARTESIANE.

$$E(x,y,z,t) = E_0\,\mathrm{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad \text{con } k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

In un mezzo indefinito omogeneo e isotropo si ha:

$$E = \frac{E_0}{R}\,\mathrm{sen}(kR - \omega t) \quad \text{(ONDE SFERICHE)}$$



FRONTE D'ONDA SFERICO

$$E = Bv \;,\quad \vec E \cdot \vec B = 0 \quad e \quad \vec E \times \vec B = \frac{E^2}{v}\vec u_R$$

Il vettore di Poynting si può scrivere:

$$\vec S = \frac{1}{\mu}\vec E \times \vec B$$

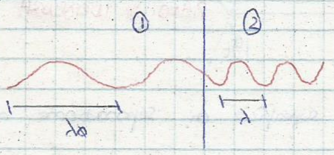
Invece l'intensità di un'onda sferica si può scrivere così:

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v \frac{E_0^2}{R^2} = \frac{n}{2Z_0}\frac{E_0^2}{R^2}$$

Per un'onda cilindrica si ha:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{R}}\operatorname{sen}(kR - \omega t) \;,\quad I = \frac{1}{2}\varepsilon v \frac{E_0^2}{R} = \frac{n}{2Z_0}\frac{E_0^2}{R}$$

Parliamo ora della riflessione e della rifrazione delle onde. Quando un'onda attraversa una superficie di separazione tra due mezzi la sua velocità di propagazione cambia. Supponiamo di avere:



SUPERFICIE DI SEPARAZIONE

Si noti che nell'attraversamento della superficie non variano né la pulsazione né la frequenza, ma variano λ e K.

In particolare si ha:

$$\omega = 2\pi\nu \;,\quad \begin{matrix}\lambda_1 \nu = v_1 \\ \lambda_2 \nu = v_2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} K_1 = \dfrac{\omega}{v_1} \\ K_2 = \dfrac{\omega}{v_2}\end{matrix} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad e \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Si ricordi che: $\nu = \frac{1}{T}$

Si noti che se $v_1 > v_2$ si ha che $\lambda_1 > \lambda_2$, e per un'onda elettromagnetica piana che passi dal vuoto ad un mezzo trasparente si ha:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \;,\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n = k_0 n \qquad \text{con } \begin{cases} v_1 = c_0 = c \\ v_2 = c/n \end{cases}$$

Chiamiamo n indice di rifrazione del mezzo. Se $n > 1$ si ha che la lunghezza d'onda in un mezzo è sempre minore di quella nel vuoto. Consideriamo ora:

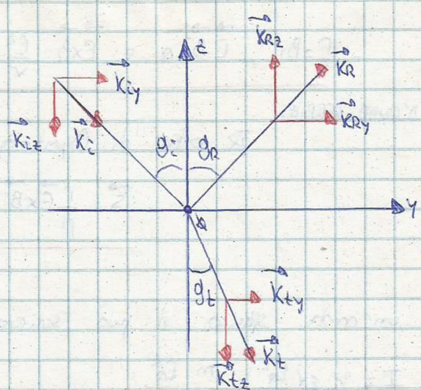
$$\xi_i = \xi_{0i}\cos(\vec k_i \cdot \vec R - \omega t) \longrightarrow \text{onda incidente}$$

$$\xi_R = \xi_{0R}\cos(\vec k_R \cdot \vec R - \omega t) \longrightarrow \text{onda riflessa}$$

$$\xi_t = \xi_{0t}\cos(\vec k_t \cdot \vec R - \omega t) \longrightarrow \text{onda rifratta}$$

Sulla superficie di separazione le fasi delle tre onde devono essere uguali e quindi:

$$\vec{K_i}\cdot\vec{R} = \vec{K_R}\cdot\vec{R} = \vec{K_t}\cdot\vec{R}$$



Chiamiamo:

ϑ_i = angolo di incidenza

ϑ_R = angolo di riflessione

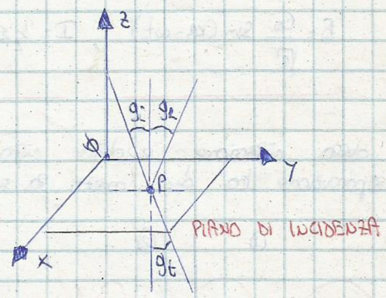
ϑ_t = angolo di rifrazione

Possiamo scrivere:

$$\vec{R} = x\vec{U_x} + y\vec{U_y}$$
$$\vec{K_i} = K_{iy}\vec{U_y} + K_{iz}\vec{U_z}$$
$$\vec{K_R} = K_{Rx}\vec{U_x} + K_{Ry}\vec{U_y} + K_{Rz}\vec{U_z}, \quad \vec{K_t} = K_{tx}\vec{U_x} + K_{ty}\vec{U_y} + K_{tz}\vec{U_z} \Rightarrow K_{iy} = K_{Rx}x + K_{Ry}y = K_{tx}x + K_{ty}y$$

Quindi per qualsiasi punto P del piano si ha:

$$\begin{cases} K_{Rx} = K_{tx} = 0 \\ K_{iy} = K_{Ry} = K_{ty} \end{cases}$$



Enunciamo la prima legge della riflessione e rifrazione:

- le direzioni di propagazione dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda rifratta giacciono nel piano di incidenza individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie di separazione nel punto di incidenza. Osserviamo che:

$$K_{iy} = K_i \,\text{sen}\,\vartheta_i = \frac{\omega}{v_1}\,\text{sen}\,\vartheta_i, \quad K_{Ry} = \frac{\omega}{v_1}\,\text{sen}\,\vartheta_R, \quad K_{ty} = \frac{\omega}{v_2}\,\text{sen}\,\vartheta_t$$
$$\Downarrow$$
$$\text{sen}\,\vartheta_i = \text{sen}\,\vartheta_R, \quad \frac{1}{v_1}\,\text{sen}\,\vartheta_i = \frac{1}{v_2}\,\text{sen}\,\vartheta_t.$$

In definitiva si ha:

$$\vartheta_i = \vartheta_R \rightarrow \text{RIFLESSIONE}$$

Quindi:

$$\frac{\text{sen}\,\vartheta_i}{\text{sen}\,\vartheta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Quindi:
- SECONDA LEGGE DELLA RIFLESSIONE E RIFRAZIONE: L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza
- TERZA LEGGE DELLA RIFLESSIONE E RIFRAZIONE: Il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è uguale al rapporto tra le velocità di propagazione.

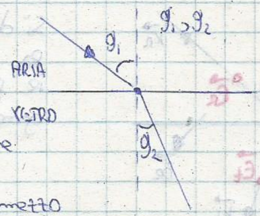
Per un'onda piana luminosa che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi trasparenti aventi indici di rifrazione n_1 e n_2 si può scrivere:

$$\frac{\text{sen}\,\vartheta_i}{\text{sen}\,\vartheta_t} = v_1/v_2 = \frac{c}{n_1}\frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\vartheta_i}{\text{sen}\,\vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \Rightarrow n_1\,\text{sen}\,\vartheta_i = n_2\,\text{sen}\,\vartheta_t$$

Chiamiamo $n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$ indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo. La precedente relazione è nota come Legge di Snell.

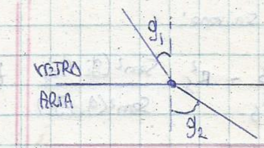
Quando invece un'onda luminosa piana si propaga da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un mezzo con indice di rifrazione $n_2 > n_1$ si ha:

$$\operatorname{sen}\vartheta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\vartheta_1 \Rightarrow \vartheta_2 < \vartheta_1 \quad \text{se } n_2 > n_1$$

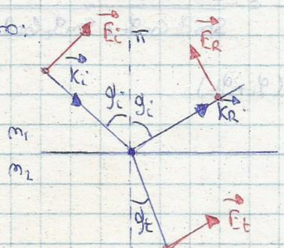


Nell'attraversamento della superficie di separazione la direzione di propagazione dell'onda piana trasmessa si avvicina alla normale alla superficie. Nel caso in cui l'onda passa da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un mezzo con indice $n_2 < n_1$ si ha:

$$\operatorname{sen}\vartheta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\vartheta_1 \Rightarrow \vartheta_2 > \vartheta_1 \quad \text{se } n_2 < n_1$$



Consideriamo:



π = PIANO DI INCIDENZA

Abbiamo visto che $\vartheta_i = \vartheta_R$. Possiamo anche scrivere:

$$R_\pi = \frac{E^R_{0,\pi}}{E^i_{0,\pi}} = \frac{n_2\cos\vartheta_i - n_1\cos\vartheta_t}{n_2\cos\vartheta_i + n_1\cos\vartheta_t} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i - \operatorname{sen}\vartheta_t\cos\vartheta_t}{\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i + \operatorname{sen}\vartheta_t\cos\vartheta_t} = \frac{\operatorname{Tg}(\vartheta_i-\vartheta_t)}{\operatorname{Tg}(\vartheta_i+\vartheta_t)}$$

$$t_\pi = \frac{E^t_{0,\pi}}{E^i_{0,\pi}} = \frac{2n_1\cos\vartheta_i}{n_2\cos\vartheta_i + n_1\cos\vartheta_t} = \frac{2\operatorname{sen}\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i + \operatorname{sen}\vartheta_t\cos\vartheta_t} = \frac{2\operatorname{sen}\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\operatorname{sen}(\vartheta_i+\vartheta_t)\cos(\vartheta_i-\vartheta_t)}$$

Le precedenti formule prendono il nome di formule di Fresnel nel piano π. Quindi:

$$I^i_\pi = \frac{n_1}{2Z_0}\left(E^i_{0,\pi}\right)^2$$

$$I^R_\pi = \frac{n_1}{2Z_0}\left(E^R_{0,\pi}\right)^2 \Rightarrow W^i_\pi = \Sigma_i I^i_\pi, \quad W^R_\pi = \Sigma_R I^R_\pi, \quad W^t_\pi = \Sigma_t I^t_\pi$$

$$I^t_\pi = \frac{n_2}{2Z_0}\left(E^t_{0,\pi}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{R}_\pi = \frac{W^R_\pi}{W^i_\pi} = R_\pi^2 = \frac{\operatorname{Tg}^2(\vartheta_i-\vartheta_t)}{\operatorname{Tg}^2(\vartheta_i+\vartheta_t)}$$

coefficiente di riflessione nel piano π

Analogamente:

$$\frac{W^t_\pi}{W^i_\pi} = \frac{n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i}\left(\frac{E^t_{0,\pi}}{E^i_{0,\pi}}\right)^2 = \frac{\Sigma_t I^t_\pi}{\Sigma_i I^i_\pi} = \frac{n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i}t_\pi^2$$

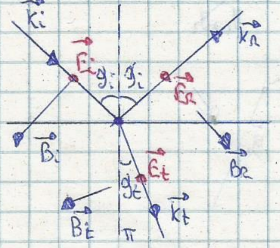
$$\Downarrow$$

coefficiente di trasmissione nel piano π

$$T_\pi = \frac{W^t_\pi}{W^i_\pi} = \frac{n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i}t_\pi^2 = \frac{\operatorname{sen}2\vartheta_i\operatorname{sen}2\vartheta_t}{\operatorname{sen}^2(\vartheta_i+\vartheta_t)\cos^2(\vartheta_i-\vartheta_t)}$$

Si noti in particolare che: $R_\pi + T_\pi = 1$ → per la conservazione dell'energia.

Supponiamo ora che il campo elettrico incidente sia polarizzato rettilineamente e ortogonalmente al piano di incidenza π.



Si dimostra che i campi elettrici riflesso e rifratto mantengono la polarizzazione del campo elettrico incidente. Indicando con δ il fatto che il campo elettrico è parallelo ad un piano δ ortogonale al piano di incidenza π, si ha:

$$R_\delta = \frac{E^R_{0,\delta}}{E^i_{0,\delta}} = \frac{n_1\cos\vartheta_i - n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i + n_2\cos\vartheta_t} = -\frac{\text{sen}\,\vartheta_i\cos\vartheta_t - \text{sen}\,\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\text{sen}\,\vartheta_i\cos\vartheta_t + \text{sen}\,\vartheta_t\cos\vartheta_i} =$$
$$= -\frac{\text{sen}(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\text{sen}(\vartheta_i + \vartheta_t)}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\bar{R}_\delta = \frac{W_\delta^t}{W_\delta^i} = \frac{I_\delta^t}{I_\delta^i} = R_\delta^2 = \frac{\text{sen}^2(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\text{sen}^2(\vartheta_i + \vartheta_t)}$$

$$t_\delta = \frac{E^t_{0,\delta}}{E^i_{0,\delta}} = \frac{2n_1\cos\vartheta_i}{n_1\cos\vartheta_i + n_2\cos\vartheta_t} = \frac{2\,\text{sen}\,\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\text{sen}\,\vartheta_i\cos\vartheta_t + \text{sen}\,\vartheta_t\cos\vartheta_i} =$$
$$= 2\,\text{sen}\,\vartheta_t\cos\vartheta_i / \text{sen}(\vartheta_i + \vartheta_t)$$

$$\bar{T}_\delta = \frac{W_\delta^t}{W_\delta^i} = \frac{Z_t I_\delta^t}{Z_i I_\delta^i} = \frac{n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i}\,t_\delta^2 =$$
$$= \frac{\text{sen}\,2\vartheta_i\,\text{sen}\,2\vartheta_t}{\text{sen}^2(\vartheta_i + \vartheta_t)}$$

I precedenti coefficienti inseriti prendono il nome di coefficienti di riflessione e trasmissione nel piano δ. Si noti che:

$$\bar{R}_\delta + \bar{T}_\delta = 1 \Rightarrow R_\delta^2 + \frac{n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i}\,t_\delta^2 = 1$$

Quando l'angolo di incidenza è nullo, la direzione di incidenza coincide con la normale alla superficie di separazione e la nozione di piano di incidenza perde di significato. Quindi i campi elettrici dell'onda incidente, riflessa e trasmessa sono paralleli tra loro. Quindi:

$$E_1 = E_i + E_R = E_2 = E_t$$

Inoltre:

$$I_i = I_R + I_t \Rightarrow n_1 E_i^2 = n_1 E_R^2 + n_2 E_t^2$$
$$\Downarrow$$
$$E_R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i, \quad E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i$$

Quindi le formule di Fresnel diventano:

$$R = E_R/E_i = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = E_t/E_i = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

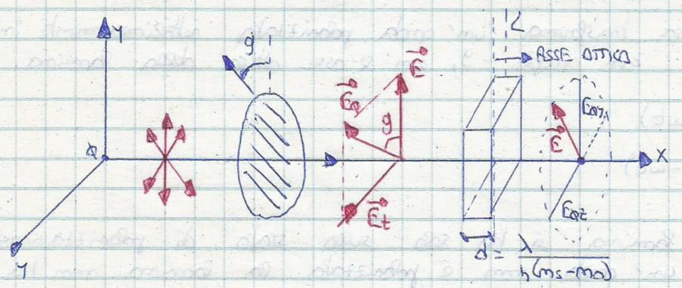
Quindi:
$$\begin{cases} \bar{R} = W_R/W_i = I_R/I_i = R^2 = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \\ \bar{T} = W_t/W_i = I_t/I_i = \dfrac{n_2}{n_1}\,t^2 = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{cases}$$

In generale possiamo scrivere:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_R}{I_i} = R_\pi \frac{I_\pi^i}{I_i} + R_\delta \frac{I_\delta^i}{I_i}$$

$$T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{\cos\vartheta_t I_t}{\cos\vartheta_i I_i} = \frac{n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i}\left(t_\pi^2 \frac{I_\pi^i}{I^i} + t_\delta^2 \frac{I_\delta^i}{I_i}\right) = T_\pi \frac{I_\pi^i}{I_i} + T_\delta \frac{I_\delta^i}{I_i}$$

Consideriamo ora una lamina L di cristallo caratterizzata dagli indici di rifrazione n_o e n_s, tagliata con la superficie parallela all'asse ottico.



Un'onda piana elettromagnetica polarizzata rettilineamente, si propaga lungo l'asse x e incide normale sulla lamina. Abbiamo:

$$E_y = E_0 \cos\vartheta \cos(kx - \omega t)$$
$$E_z = E_0 \sin\vartheta \cos(kx - \omega t)$$

$\begin{cases} str = \text{straordinaria} \\ ord = \text{ordinaria} \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$E_{str} = E_y = E_0 \cos\vartheta \cos(kx + k_s d - \omega t)$$
$$E_{ord} = E_z = E_0 \sin\vartheta \cos(kx + k_o d - \omega t)$$

Siccome: $\begin{cases} k_s = n_s k \\ k_o = n_o k \end{cases} \Rightarrow$ la componente straordinaria e ordinaria dell'onda uscente sono sfasate. Quindi:

$$\Delta\phi = \phi_s - \phi_o = (k_s - k_o)d = k(n_s - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_o)d$$

Si noti che l'onda straordinaria è in anticipo su quella ordinaria nei cristalli positivi, in ritardo in quelli negativi. Quindi:

$$E_y = E_0 \cos\vartheta \cos(kx + k_s d - \omega t)$$
$$E_z = E_0 \sin\vartheta \cos(kx + k_s d - \omega t - \Delta\phi)$$

L'onda emergente dalla lamina in genere è polarizzata ellitticamente, se l'onda entrante è polarizzata rettilineamente. Supponiamo ora che lo sfasamento $\Delta\phi$ introdotto dalla lamina sia un multiplo intero dispari di $\pi/2$. Abbiamo:

$$\Delta\phi = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad d = \frac{\lambda}{4(n_s - n_o)} \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Si ha: