Chiamiamo onde longitudinali quelle onde che si propagano lungo un solo asse (asse x) e dove lo spostamento e la forza sono paralleli a questo asse. Un tipo particolare di onda piana molto importante è l'onda armonica. Essa si può scrivere nella seguente maniera:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt) \quad \text{oppure} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \cos k(x - vt)$$

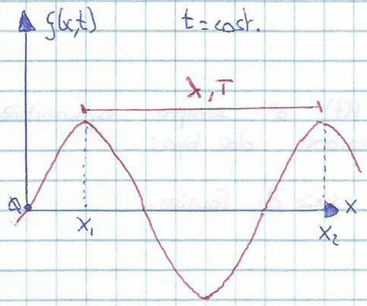
ξ_0 prende il nome di ampiezza dell'onda, e la costante k viene detta numero d'onde. Di norma si scrive:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \; ; \; \xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Chiamiamo pulsazione la seguente espressione:

$$\omega = kv$$

Si noti che $f(x - vt)$ rappresenta un fenomeno che si propaga lungo il verso positivo dell'asse x con velocità v, senza subire deformazioni. Graficamente un'onda armonica si rappresenta così:



Abbiamo già visto che λ è la lunghezza d'onda. In particolare:

$$\lambda = x_2 - x_1 \Rightarrow \text{se } (x_2 - x_1)k = \pi \cdot 2$$

$$\lambda k = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Quindi la costante k mi rappresenta il numero di lunghezze d'onda che stanno su una distanza di 2π. Se all'istante $t = t_2$ siamo nella posizione x_2 e all'istante $t = t_1$, nella posizione x_1, abbiamo che la differenza tra questi due istanti temporali è il periodo (T):

$$T = t_2 - t_1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv}$$

Quindi:

$$T = \frac{2\pi}{kv} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} v} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow \lambda = v \cdot T$$

Perciò: $\quad f = 1/T \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$

Nel seguito considereremo spesso onde armoniche di questo tipo:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

NB: δ = valore dell'argomento per $x = t = 0$.

Chiamiamo fase dell'onda armonica l'argomento della precedente funzione:

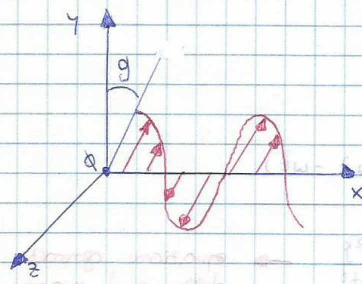
$$\phi(x,t) = k\omega - \omega t + \delta$$

Tale vettore può assumere qualsiasi direzione ortogonale a x. In questo caso la dipendenza della direzione di $\vec{\xi}$ da x e t è completamente casuale, e in questo caso siamo in presenza di un'onda non polarizzata. Viceversa se tale dipendenza segue una precisa legge siamo in presenza di un'onda polarizzata. Quindi consideriamo la seguente situazione:

$$\xi_y = \xi_{0y}\,\mathrm{sen}(kx-\omega t)$$
$$\xi_z = \xi_{0z}\,\mathrm{sen}(kx-\omega t+\delta)$$

dove δ qui rappresenta la differenza di fase tra le due onde. Se $\delta = 0$ la direzione di $\vec{\xi}$ è fissa, e quindi forma un angolo ϑ con l'asse y.

$$\mathrm{Tg}\,\vartheta = \frac{\xi_z}{\xi_y} = \frac{\xi_{0z}}{\xi_{y0}} = \text{costante} \rightarrow \text{POLARIZZAZIONE RETTILINEA.}$$



Si noti che $\delta = 0$ vuol dire che le componenti delle due onde sono in fase. Viceversa se $\delta = \pi$ le componenti sono in opposizione di fase.

Si ricordi infatti che: $\vec{\xi}(x,t) = \xi_y(x,t)\vec{U}_y + \xi_z(x,t)\vec{U}_x = (\xi_y(x,t) + \xi_z(x,t))\vec{U}_x$.

Per $\delta = \pi$ la situazione è la medesima soltanto che $\vec{\xi}$ forma con l'asse y un angolo $-\vartheta$. Quindi quando il vettore $\vec{\xi}$ ha direzione fissa si dice che l'onda piana è polarizzata linearmente o rettilineamente. La direzione fissa di ξ è chiamata direzione di polarizzazione e il piano fisso in cui giace ξ viene chiamato piano di polarizzazione. Se $\delta = \pi/2$ si ha:

$$\xi_y = \xi_{0y}\,\mathrm{sen}(kx-\omega t), \quad \xi_z = \xi_{0z}\cos(kx-\omega t)$$

In una data posizione P di coordinata x_0 le componenti dell'onda soddisfano in qualsiasi istante la seguente relazione:

$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0z}^2} = 1$$

Con il passare del tempo nel punto P, la punta del vettore $\vec{\xi}$ descrive un'ellisse. Con $\delta = \frac{3}{2}\pi$ si ha lo stesso fenomeno ma con verso di rotazione opposto. In entrambi i casi comunque si parla di onda polarizzata ellitticamente. Un caso particolare si ha quando $\delta = \pi/2$ o $\delta = \frac{3}{2}\pi$ e $\xi_{0y} = \xi_{0z} = \xi_0$. Si ottiene:

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 = \xi_0^2$$

e l'onda viene detta polarizzata circolarmente. Definiamo fronte d'onda una superficie su cui in un certo istante la fase è costante. Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda piana, che dipende dalla struttura della sorgente, si introduce il vettore di propagazione $\vec{K}$ che ha modulo:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Detto $\vec{R}$ il raggio vettore che individua un punto P su un fronte d'onda piano, si ha:

$$\vec{K}\cdot\vec{R} = kR\cos\theta = kx$$

e quindi la funzione d'onda si può scrivere:

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\vec{K}\vec{R} - \omega t)$$

In un generico sistema di coordinate cartesiane si ha:

$$\vec{K} = K_x\vec{U}_x + K_y\vec{U}_y + K_z\vec{U}_z \quad , \quad \vec{R} = x\vec{U}_x + y\vec{U}_y + z\vec{U}_z$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)$$

con: $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ → equazione generale delle onde piane.

Queste ultime equazioni descrivono le onde in più dimensioni. Un'onda prodotta da una sorgente puntiforme posta nel punto O si propaga in tutte le direzioni e il fronte d'onda risulta essere sferico con centro in O e la sua velocità di propagazione è la stessa in tutte le direzioni.

Questa è un'onda sferica armonica, la cui funzione è:

$$\xi(R,t) = A(R)\operatorname{sen}(kR - \omega t)$$

dove R è la distanza da O.

Siccome l'intensità d'onda rappresenta il valor medio dell'energia che passa attraverso una sezione ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di area, e cioè:

$$I = \frac{1}{\Sigma}\left(\frac{dU_{mecc}}{dt}\right)_m = \frac{P_m}{\Sigma} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v$$

si ha che la potenza media trasmessa attraverso una superficie sferica è:

$$P_m = I\Sigma = cA^2(R)\,4\pi R^2$$

Si dimostra che l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente.

$$I = \frac{I_0}{R^2}$$

Chiamiamo onde cilindriche quelle onde che possiedono fronti d'onda che sono superfici cilindriche. Se poniamo su un asse tante sorgenti che oscillano alla stessa fase si ottiene un'onda di questo tipo. Presa una superficie cilindrica Σ con $\Sigma = 2\pi R h$, la potenza media che la attraversa è:

$$P_m = I(R)\Sigma = C A^2(R)\, 2\pi R h$$

Questo comporta che l'intensità sia inversamente proporzionale a R e l'ampiezza a $\sqrt{R}$. Quindi la funzione è:

$$\xi(R,t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{R}} \operatorname{sen}(kR - \omega t)$$

e

$$I = \frac{I_0}{R}$$

Parliamo ora delle onde elettromagnetiche. Esse sono delle onde che godono di alcune proprietà tra cui quella di propagarsi nel vuoto, e di essere prodotte da cariche in moto con accelerazione molto grande. Consideriamo ora un mezzo indefinito e omogeneo di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ, nel quale non ci sono cariche libere e correnti di conduzione. Quindi:

$$\rho = 0 \quad , \quad \vec{J} = 0$$

In queste condizioni le equazioni di Maxwell sono:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Supponendo che:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Analogamente:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \phi$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_y}{\partial t} \quad , \quad \partial E_y/\partial t = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Quindi:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \xrightarrow{\text{derivo rispetto a } x} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x} \xrightarrow{\text{derivo rispetto a } x} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

Anche per l'altra coppia di equazioni si ha:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Ogni componente di $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ soddisfa la seguente equazione differenziale delle onde piane:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Quindi i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano lungo l'asse x sotto forma di onde piane con velocità:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k_e k_m}} = \frac{c}{\sqrt{k_e k_m}} \quad \text{con } k_e = k_m = 1.$$

Così Maxwell ipotizzò che la luce era un'onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico. Vediamo ora la propagazione lungo l'asse x dei componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Si ha:

$$E_y = E_y(x-vt) \quad , \quad E_z = E_z(x-vt) \quad , \quad B_y = B_y(x-vt) \quad , \quad B_z = B_z(x-vt)$$

In forma vettoriale si ha:

$$\vec{E} = E_y(x-vt)\vec{U}_y + E_z(x-vt)\vec{U}_z$$
$$\vec{B} = B_y(x-vt)\vec{U}_y + B_z(x-vt)\vec{U}_z$$

Posto $u = x - vt$ si ha:

$$\partial u/\partial x = 1 \quad , \quad \partial u/\partial t = -v \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}$$

$$\Downarrow$$

$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{v}\int \frac{\partial E_z}{\partial u} du = -\frac{E_z}{v} + \text{cost}$$

In definitiva:

$$B_y(x-vt) = -\frac{1}{v} E_z(x-vt) \quad e \quad B_z(x-vt) = \frac{1}{v} E_y(x-vt)$$

Quindi le componenti del campo B risultano dipendenti da quelle del campo $\vec{E}$. Possiamo perciò scrivere:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_y(x-vt)\vec{U_y} + E_z(x-vt)\vec{U_z} \\ v\vec{B} = -E_z(x-vt)\vec{U_y} + E_y(x-vt)\vec{U_z} \end{cases}$$

Cioè:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}(E_y^2 + E_y^2) = \frac{E^2}{v^2} \Rightarrow B = \frac{E}{v}$$

Dal prodotto scalare si ha: $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$

e quindi i due vettori sono sempre perpendicolari tra loro. Dal prodotto vettoriale si ha:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v}\vec{U_x} = vB^2\vec{U_x} = EB\vec{U_x}$$

Quindi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano con la stessa velocità v, che nel vuoto vale:

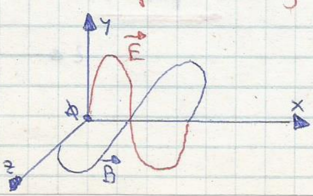
$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

I moduli dei campi sono legati tra loro dalla relazione:

$$B = \frac{E}{v}$$

e nel vuoto: $B = E/c$. $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro e compongono onde trasversali.

Per queste onde è significativo il concetto di polarizzazione. Nella teoria di Maxwell si ha quindi il concetto di campo elettromagnetico. Graficamente si ha:



Hanno gli stessi massimi e minimi.

Indichiamo con 'n' l'indice di rifrazione assoluto del mezzo ed è:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{K_e}$$

Quando $B = \mu H \Rightarrow \frac{E}{H} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z \rightarrow$ impedenza caratteristica del mezzo

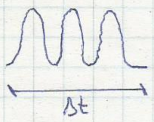
Nel vuoto si ha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega .$$

Nei mezzi trasparenti alle onde, dove $K_m \simeq 1$ si ottiene:

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{K_e}} = \frac{Z_0}{n}$$

Abbiamo precedentemente detto che per le onde elettromagnetiche è importante il concetto di polarizzazione. In particolare le sorgenti elettromagnetiche di solito emettono pacchetti d'onde armoniche.



Se la durata Δt del pacchetto è tale che $\Delta\nu = 1/\Delta t$ è molto piccola rispetto alla frequenza media, possiamo trattare tale pacchetto come un'onda armonica di lunghezza λ e frequenza ν.

Per un'onda elettromagnetica piana si definisce polarizzazione in questo modo:

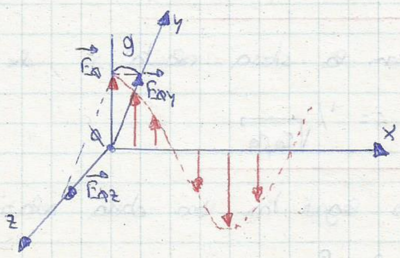
$$E_y = E_{0y}\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t) \quad , \quad E_z(x,t) = E_{0z}\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \delta)$$

- POLARIZZAZIONE RETTILINEA:

$\delta = 0 \;,\; \delta = \pi$

$\Downarrow$

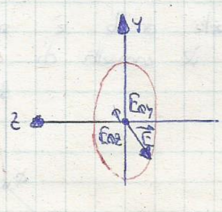
$$\begin{cases} E_y = E_{0y}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ E_z = \pm E_{0z}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \end{cases}$$



Inoltre: $\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \mathrm{Tg}\,\vartheta$; Oscillazione: $E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$ con: $\begin{cases} E_{0y} = E_0 \cos\vartheta \\ E_{0z} = E_0\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$

- POLARIZZAZIONE ELLITTICA:

$\delta = \pi/2 \quad , \quad \delta = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \begin{matrix} E_y = E_{0y}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ E_z = \pm E_{0z}\cos(kx - \omega t) \end{matrix}$ con $E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$



- POLARIZZAZIONE CIRCOLARE: $\begin{matrix} E_y = E_0\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t) \\ E_z = \pm E_0 \cos(kx - \omega t) \end{matrix}$