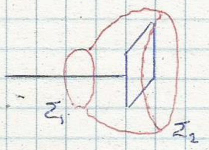
Se consideriamo per esempio una armatura di un condensatore, abbiamo:



$$\int_{\Sigma_1} \vec{J}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma_1 = i = \frac{dq}{dt}$$

$$\int_{\Sigma_2} \vec{J}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma_2 = 0$$

Il vettore densità di corrente non è quindi solenoidale. C'è evidentemente un contrasto. Maxwell pensò quindi di esprimere la derivata della densità di carica usando la legge di Gauss in forma locale. Quindi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 \nabla\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0 \nabla\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

Perciò definiamo densità di corrente totale:

$$\vec{J}_{TOT} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \mu_0 (i + i_s) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_s) \end{cases} \longrightarrow \text{Legge di Ampère-Maxwell}$$

Si noti che la quantità:

$$\vec{J}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \text{densità di corrente di spostamento}$$

$$\Downarrow$$

$$i_s = \int \vec{J}_s \, \vec{u}_n \, d\Sigma = \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{u}_n \, d\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} \longrightarrow \text{corrente di spostamento}$$

Questa trattazione però non considera la presenza di mezzi materiali. Se lo spazio, in particolare, è riempito da un mezzo dielettrico si scrive:

$$\vec{J}_{TOT} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \mu_0 (i + i_s) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_s) \quad \text{con } \vec{J}_s = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

NB: $i_s = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{\partial \Phi(\vec{D})}{\partial t}$

Quindi ricapitolando nello spazio vuoto e in presenza di cariche le equazioni di Maxwell sono:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial B/\partial t$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

In questo nuovo contesto le grandezze viste in precedenza cambiano. In particolare:

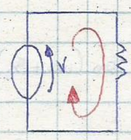
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

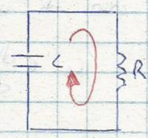
Quindi: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ → equazioni di Maxwell per mezzi in quiete.

Infine: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti

Parliamo ora delle correnti alternate (a.c). Consideriamo in merito il seguente circuito:



$V/_R = i$ e $V = V_R = R \cdot i$



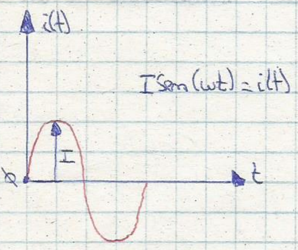
$V_C = \frac{q}{C} = R \cdot i$ perché $V_R = V_C$.

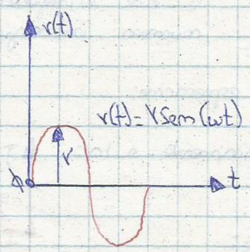
$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC}$

$\Downarrow$

$i(t) = V_0/_R \, e^{-t/\tau}$

Innanzitutto vediamo di capire che cosa è una corrente alternata.
Si parla di regime sinusoidale quando tutte le grandezze elettriche (tensione, la corrente, la potenza) sono sinusoidi isofrequenziali. Il regime sinusoidale viene anche chiamato vagamente regime alternato. Quindi in questo contesto le correnti e le tensioni sono sinusoidi.





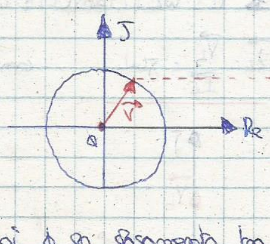
NB: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \Rightarrow \begin{cases} i(t) = I\,Sen(2\pi f t) \\ v(t) = V\,Sen(2\pi f t) \end{cases}$

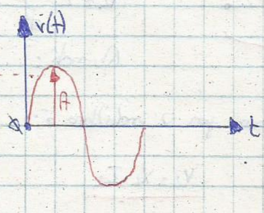
Abbiamo già parlato del condensatore. Vediamo meglio il suo funzionamento:

Questo è il simbolo circuitale del condensatore. C è la capacità del condensatore e si misura in Farad (F). Di solito le capacità vanno dai μF ai pF. L'equazione del condensatore è:

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Chiamiamo fasore il vettore che genera una sinusoide.





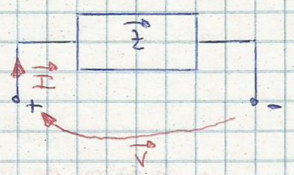
Chiaramente un fasore è caratterizzato da un modulo e da una fase. Quindi:

$$\begin{cases} |\vec{V}| = \sqrt{V_{Re}^2 + V_J^2} \\ \varphi = \arctan \frac{V_J}{V_{Re}} \end{cases}$$

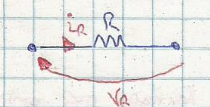
Chiamiamo poi ϕ lo sfasamento tra due fasori.

Nel dominio fasoriale chiamiamo impedenza la seguente espressione:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$



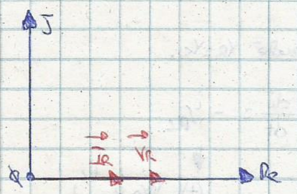
Per quanto riguarda la resistenza, nel dominio fasoriale si ha:



$$i_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V_R \operatorname{Sen}(\omega t)}{R} = I_R \operatorname{Sen}(\omega t) \quad \text{con } I_R = \frac{V_R}{R}$$

Quindi: $\vec{Z} = \frac{\vec{V_R}}{\vec{I_R}} = R$ (impedenza resistiva).

Si noti che $\phi_R = 0$, e cioè $\vec{I_R}$ e $\vec{V_R}$ sono in fase. Graficamente si ha:



Nel caso di un condensatore si ha:

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} = \omega C V_C \operatorname{Cos}(\omega t) = \omega C V_C \operatorname{Sen}(\omega t + \pi/2)$$

$$\Downarrow$$

$$i_C = I_C \operatorname{Sen}(\omega t + \pi/2)$$

Quindi: $I_C = \omega C V_C$

Notando che l'operatore J introduce uno sfasamento di $+90°$ nel mondo fasoriale, abbiamo che:

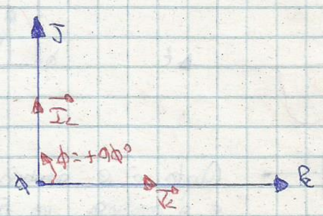
$$I_C = J\omega C V_C \Rightarrow \vec{Z} = \frac{\vec{V_C}}{\vec{I_C}} = \frac{1}{J\omega C} = -\frac{J}{\omega C}$$

e cioè l'impedenza del condensatore è un numero immaginario.

Chiamiamo reattanza capacitiva la seguente espressione:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

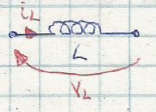
Graficamente si ha:



Quindi per il condensatore la legge di ohm vale:

$$V_C = X_C \cdot I_C$$

In modo analogo per l'induttore si ha:

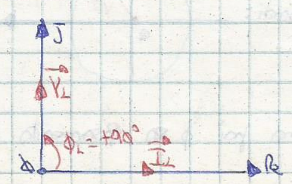


$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow V_L = \omega L I_L \operatorname{Cos}(\omega t) = \omega L I_L \operatorname{Sen}(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \vec{V_L} = J\omega L \vec{I_L}$$

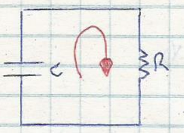
Quindi: $\vec{Z_L} = \frac{\vec{V_L}}{\vec{I_L}} = J\omega L$ con $X_L = \omega L \rightarrow$ reattanza induttiva

La legge di ohm per l'induttore è:

$$V_L = X_L \cdot I_L$$



Tornando ora al circuito di partenza abbiamo:



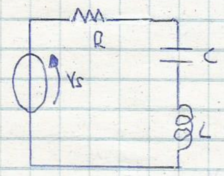
$V_C = V_R$ e la corrente i è la stessa. Quindi:

$$V_C = \frac{q}{C} = V_R = R \cdot i \quad \text{e inoltre:} \quad i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

τ viene detta costante di tempo ed è pari a:

$$\tau = RC$$

Vediamo altri tipi di circuiti:



CIRCUITO RISONANTE SERIE

Abbiamo: $\vec{Z}_s = R + j(X_L - X_C) \Rightarrow Z_s = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}$

$$\varphi_s = \operatorname{arctg} \frac{(X_L - X_C)}{R} = \operatorname{arctg}\left(\left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)\frac{1}{R}\right)$$

$$\Downarrow$$

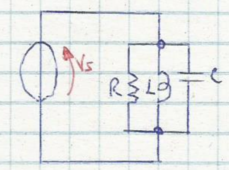
$$\varphi_s = 0 \Rightarrow 2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

Quindi per definizione la risonanza è una particolare condizione di funzionamento per cui la tensione ai capi di un'impedenza e la corrente assorbita dalla stessa risultano in fase. Ci sono sostanzialmente due tipi di circuiti in risonanza:

1) risonanza in serie.

2) risonanza in parallelo.

Vediamo ora il circuito seguente:



CIRCUITO RISONANTE PARALLELO.

Qui abbiamo:

$$\vec{Z}_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{1}{1/R + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)}$$

NB: $\vec{Y} = \frac{1}{\vec{Z}}$ = ammettenza

$$|\vec{Z}_p| = Z_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L}\right)^2}}$$

$$\varphi_p = \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)R\right] = -\operatorname{arctg}\left[\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)R\right] = -\operatorname{arctg}\left[\left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L}\right)R\right].$$

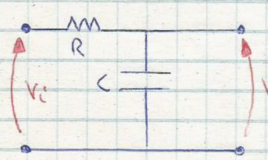
$$\Downarrow$$

$$\varphi_p = 0 \Rightarrow 2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L} = 0$$

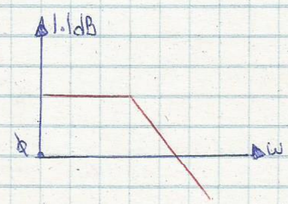
$$\Downarrow$$

$$2\pi f C = \frac{1}{2\pi f L}$$

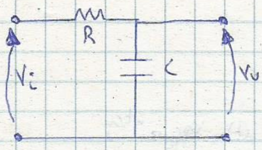
Vediamo ora alcune applicazioni dei circuiti appena visti. In particolare consideriamo:



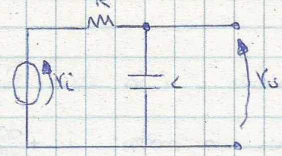
FILTRO PASSA-BASSO



Questo filtro è sostanzialmente un circuito che permette di far transitare solo i segnali a bassa frequenza. Abbiamo:



=



PARTITORE DI TENSIONE.

$$V_u = V_c = V_i - V_R$$

$$\Downarrow$$

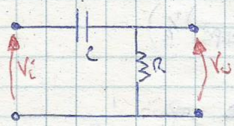
$$V_u = V_c = \frac{V_i}{R - jX_c}\cdot(-jX_c) = \frac{-jX_c V_i}{R - jX_c}$$

Quindi: $A_v = \frac{\vec{V_u}}{\vec{V_i}} = \frac{-jX_c}{R - jX_c} \Rightarrow |A_v| = \frac{X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} = \frac{1/\omega c}{\sqrt{R^2 + (1/\omega c)^2}} = \frac{1/2\pi f c}{\sqrt{R^2 + (1/2\pi f c)^2}}$

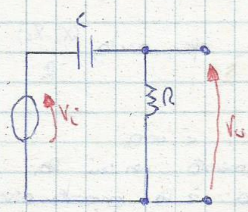
Per quanto riguarda la fase:

$$\varphi = -90° - \operatorname{arctg}\left(\frac{-X_c}{R}\right)$$

Vediamo un'altra applicazione:



$A_v = \frac{V_u}{V_i}$ =



PARTITORE

$$V_u = \frac{V_i}{R - jX_c}\cdot R$$

$$\Downarrow$$

$$V_u / V_i = R / (R - jX_c)$$

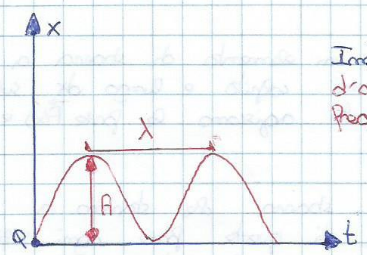
MODULO: $A_v = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f c}\right)^2}}$

FASE: $\varphi = 0° - \operatorname{arctg}\left(\frac{-X_c}{R}\right)$

Anche la potenza elettrica cambia quando siamo in regime sinusoidale. In particolare ci sono vari tipi di potenze:

- potenza istantanea: $p = v_z \cdot i_z = V_z \sin(\omega t)\cdot I_z \sin(\omega t + \varphi)$
- potenza reattiva: $Q = V_{z_{rms}} \cdot I_{z_{rms}} \sin\varphi$
- potenza apparente: $\vec{A} = P + jQ$

Parliamo ora delle onde. Un'onda è un concetto primitivo. Essa può essere così rappresentata:



Indichiamo con A l'ampiezza dell'onda, con λ la lunghezza d'onda e con T il periodo. Si noti che per definizione la frequenza f è data da:

$$f = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

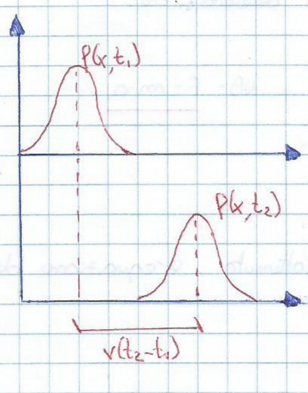
L'unità di misura della frequenza è l'hertz (Hz). I fenomeni ondulatori sono molto importanti in Fisica, e fenomeni ondulatori di tipo locale sono presenti nei fluidi, nei corpi solidi, e anche nei corpi elastici. Questi corpi prendono anche il nome di mezzi. Per esempio quando una sbarra metallica viene colpita con un martello, si ottiene un fenomeno oscillatorio all'interno della sbarra che in questo esempio è anche il mezzo in questione. Si presti attenzione alla seguente osservazione: non si hanno oscillazioni a livello macroscopico, nel senso che il mezzo rimane in quiete. Le oscillazioni avvengono all'interno del mezzo e quindi sono di natura microscopica. Chiaramente i vari elementi del mezzo oscilleranno attorno alla posizione di equilibrio con un ritardo rispetto alla sorgente che dipende dalla distanza dalla sorgente stessa e dalla velocità di propagazione. Quindi possiamo definire un'onda come quell'oscillazione che si propaga nel mezzo. Abbiamo accennato anche al concetto di sorgente. Una sorgente è un'entità generatrice di onde. Consideriamo ora il caso unidimensionale, in cui cioè la propagazione avviene lungo una determinata direzione, per esempio lungo l'asse x. L'oscillazione può essere una qualsiasi funzione $f(x,t)$ della posizione e del tempo. In particolare nella sorgente si ha:

$$f(0,t)$$

la quale ci fornisce l'oscillazione iniziale. Riprendiamo in esame l'esempio della sbarra. Supponiamo che la funzione f sia lo spostamento ξ dalla posizione di equilibrio. Quindi:

$$f(0,t) = \xi(0,t)$$

Se la perturbazione si propaga senza che avvenga nessuna perturbazione della forma cioè senza nessuna deformazione, si può avere un andamento temporale del seguente tipo:

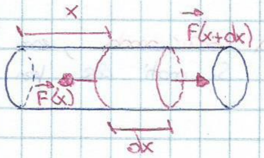


In generale la propagazione soddisfa la seguente equazione differenziale detta equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

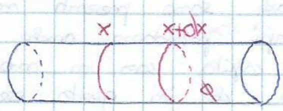
Questa equazione non è una condizione sulla forma della funzione, bensì è una condizione sull'argomento della funzione.

Supponiamo ora di voler deformare il tratto iniziale di una sbarra solida applicando una forza impulsiva.



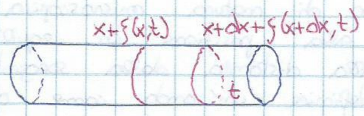
Quindi se consideriamo un elemento di sbarra a distanza x dall'estremo colpito e lungo dx, sulle basi di questo cilindretto agiscono le forze $\vec{F}(x)$ e $\vec{F}(x+dx)$.

Tali forze vengono rispettivamente esercitate dagli elementi di sbarra che stanno a sinistra e a destra del cilindretto. Quindi sotto l'azione di queste forze ogni sezione cambia la propria posizione. Indichiamo con $\xi(x,t)$ la funzione che descrive lo spostamento della posizione iniziale. Quindi per l'esempio del cilindretto abbiamo:



$$x+dx+\xi(x+dx,t)-x-\xi(x,t)=dx+d\xi$$

Si noti infatti che $\xi(x+dx,t)=\xi(x,t)+d\xi$.



Se indichiamo con $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ l'allungamento relativo del cilindretto, la formula che ci dà la deformazione $d\xi$ di un elemento di sbarra lungo dx quando è applicata la forza F è:

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

Quindi si ottiene: $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{E}\,\frac{F}{S} \Rightarrow F(x)=ES\frac{\partial\xi}{\partial x}$

Usando quest'ultima relazione possiamo scrivere la risultante delle forze che agiscono sul cilindretto come:

$$F(x+dx)-F(x)=\frac{\partial F}{\partial x}dx=ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

Poi il moto del cilindretto di massa $dm=\rho S dx$ avviene con accelerazione:

$$a=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \Rightarrow ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx=\rho S\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dx$$

NB: $F=m\cdot a$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Indicando con: $v=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$. Quindi abbiamo riottenuto l'equazione delle onde piane.