

(52)

Se la trasformazione è reversibile si ha:

$$dQ = mC_v dT + p dV \Rightarrow Q = \int_{T_A}^{T_B} mC_v dT + \int_{V_A}^{V_B} p dV =$$

$$= n \int_{T_A}^{T_B} C_v dT + \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

Quindi:

$$Q = mC_v \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV \quad \text{se } C_v = \text{cost.}$$

Per una trasformazione isobara si ha:

$$\begin{cases} dQ = mC_p dT \\ dV = p dV \end{cases} \Rightarrow mC_p dT = mC_v dT + p dV$$

$$\text{Siccome: } pV = nRT \Rightarrow p dV + V dp = nR dT$$

A questo punto si ha:

$$\begin{aligned} dp = 0 &\Rightarrow p dV = nR dT \Rightarrow mC_p dT = mC_v dT + nR dT = \\ &= (mC_v + nR) dT = m dT (C_v + R) \end{aligned}$$

Quindi:

$$mC_p dT = m dT (C_v + R) \Rightarrow C_p = C_v + R \Rightarrow \underline{R = C_p - C_v} \rightarrow \text{RELAZIONE DI MAYER.}$$

Quindi in un gas ideale C_p è funzione soltanto della temperatura.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \rightarrow \text{RAPPORTO TRA I CALORI SPECIFICI.}$$

$\gamma > 1$ nei gas ideali, ed è funzione soltanto della temperatura. In particolare:

• GAS MONOATOMICI: $C_v = \text{cost} = \frac{3}{2}R$

$$C_p = \frac{5}{2}R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$$

• GAS BIATOMICI:

$$C_v = \frac{5}{2}R$$

$$C_p = \frac{7}{2}R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Quindi riassumendo:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta U = Q - W \\ \Delta U = mC_v \Delta T \quad \rightarrow \text{per qualsiasi trasformazione} \\ Q = mC_v \Delta T, \quad V = \text{cost} \\ Q = mC_p \Delta T, \quad p = \text{cost} \\ pV = nRT \\ C_p - C_v = R \end{array} \right.$$

RELAZIONI FONDAMENTALI.

Studiamo ora alcune trasformazioni:

- TRASFORMAZIONI ADIABATICHE: Non si ha scambio di calore ma solo di lavoro.
Quindi:

$$dU = -dW$$



$$W = -\Delta U = -mC_v(T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1} (P_A V_A - P_B V_B)$$

Imponiamo:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{C_p}{C_v} \\ R = C_p - C_v \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma} \quad \text{e} \quad P V = n(C_p - C_v) T \\ P V = n R T \end{cases}$$

$$m C_v T_A - m C_v T_B = \Delta U$$

Quindi:

$$P_A V_A - P_B V_B = n R T_A - n R T_B \quad \text{e quindi:} \quad \frac{P_A V_A}{R} - \frac{P_B V_B}{R} = n T_A - n T_B$$

Se si ha un'espansione adiabatica $V_{AB} > V_A \Rightarrow \Delta U < 0$. Quindi il gas si raffredda. Se si ha una compressione adiabatica, $V_{AB} < V_A \Rightarrow \Delta U > 0$ e $T_B > T_A$.
Se la trasformazione è reversibile si ha:

$$dU + dW = m C_v dT + p dV = 0$$

Sostituendo:

$$P = \frac{n R T}{V} \Rightarrow m C_v dT + \frac{n R T}{V} dV = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} R = C_p - C_v \\ \gamma = \frac{C_p}{C_v} \end{cases} \Rightarrow \frac{dV}{V} \frac{n(C_p - C_v)}{n C_v} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Integrando:

$$\int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = - \int_{V_A}^{V_B} (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{T_B}{T_A} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Quindi:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_A}{T_B}$$

In conclusione:

$$\begin{cases} T V^{\gamma-1} = \text{costante} \\ P V^{\gamma} = \text{costante} \\ T P^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{costante} \end{cases}$$

EQUAZIONI DI UNA TRASFORMAZIONE REVERSIBILE DI UN GAS IDEALE.

- TRASFORMAZIONI ISOTERMICHE:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W \quad \text{e quindi:} \quad P_A V_A = P_B V_B$$

Se la trasformazione è un'espansione si ha: $V_{AB} > V_A$, $Q_{AB} > 0$.

(52)

Se la trasformazione è una compressione si ha: $W_{AB} < 0$, $Q_{AB} < 0$.
 Se la trasformazione è reversibile:

$$W_{AB} = \int_A^B P dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$Q = 0 \Rightarrow$ in una trasformazione isoterma reversibile.

• TRASFORMAZIONE ISOCORA:

$$V = \text{cost.} \Rightarrow V_B = V_A$$

Quindi: $Q = \Delta U = m c_v (T_B - T_A)$ se $c_v = \text{cost.}$

Concludendo:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

• TRASFORMAZIONI ISOBARE:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

$$Q = m c_p (T_B - T_A), \quad W = p(V_B - V_A) = p \left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p} \right) = nR(T_B - T_A)$$

Quindi:

$$\Delta U = Q - W = m c_v (T_B - T_A)$$

Inoltre:

$$H = U + PV \rightarrow \text{ENTALPIA.}$$

È una funzione di stato. Quindi: $H = H(T)$

Quindi:

$$dH = dU + d(PV) = m c_v dT + m R dT = m c_p dT$$

Per una trasformazione finita si ha:

$$\begin{cases} \Delta H = m \int_{T_A}^{T_B} c_p dT \\ \Delta H = m c_p (T_B - T_A) \quad \text{se } c_p = \text{cost.} \end{cases}$$

$$Q = \Delta H \rightarrow \text{TR. ISOBARA.}$$

$$\begin{cases} Q = \Delta U \rightarrow \text{TRASFORMAZIONE ISOCORA.} \\ Q = \Delta H \rightarrow \text{TRASFORMAZIONE ISOBARA.} \end{cases}$$

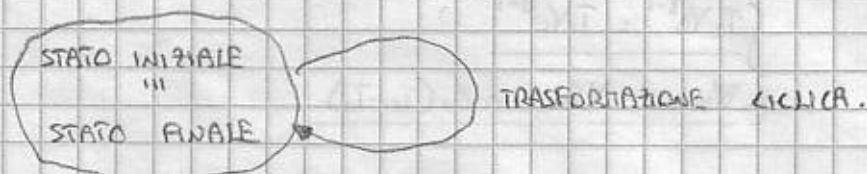
Quindi:

$$\begin{cases} c_v = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT} \\ c_p = \frac{1}{m} \frac{dH}{dT} \end{cases}$$

Infine per quanto riguarda le trasformazioni generali si ha:

$$dQ = dU + dW = m c_v dT + p dV$$

Se la trasformazione è reversibile possiamo usare $PV = mRT$ e $dW = p dV$.
Se abbiamo:



In una trasformazione di questo tipo, si ha:

$$dU = Q - W \Rightarrow Q = W$$

Se viene prodotto lavoro assorbendo calore, ciò viene detto **TERMO**. Se invece il lavoro richiesto proviene dall'esterno e si estrae calore da sorgenti fredde per cedersi a sorgenti calde, allora ciò viene detto **FRIGORIFERO**.
Quindi:

$$Q = Q_A + Q_C \quad \begin{cases} Q_A = \text{calore assorbito} \\ Q_C = \text{calore ceduto} \end{cases}$$

$$W = W_F + W_S \quad \begin{cases} W_F = \text{lavoro fatto} \\ W_S = \text{lavoro subito} \end{cases}$$

Si definisce rendimento:

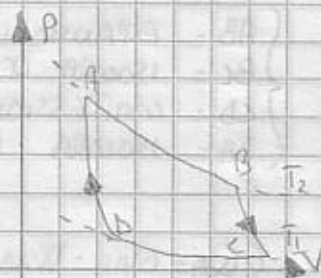
$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Quindi il rendimento è la percentuale di calore assorbito da essere trasformata in lavoro. Si ha:

$$0 \leq \eta \leq 1$$

In un ciclo termico, solo una frazione minore di una del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene ceduto.
Vediamo i vari cicli:

• **Ciclo di Carnot**: 4 trasformazioni reversibili.



- AB = espansione isoterma reversibile
- BC = espansione adiabatica reversibile
- CD = compressione isoterma reversibile
- DA = compressione adiabatica reversibile

Dallo stato di equilibrio A allo stato di equilibrio B si ha le seguenti

assorbimento di calore:

$$Q_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$$

Nella trasformazione BC si ha:

$$\begin{cases} T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \\ W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nC_V(T_2 - T_1) \end{cases}$$

Nella trasformazione CD si cede calore:

$$Q_C = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD} \quad \underline{W_{CD} < 0}$$

Infine nella trasformazione DA si ha:

$$\begin{cases} T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1} \\ W_{DA} = -\Delta U_{DA} = nC_V(T_1 - T_2) = -W_{BC} \end{cases}$$

Quindi:

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD} \rightarrow \text{area del ciclo}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln(V_D/V_C)}{nRT_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln(V_D/V_C)}{T_2 \ln(V_B/V_A)}$$

Siccome:

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

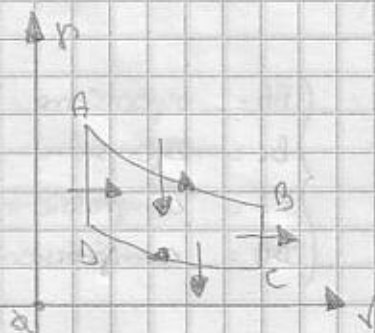
↓

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

Quindi:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \underline{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}} \rightarrow \text{dipende solo dalle temperature.}$$

- CICLO DI STIRLING: 4 trasformazioni reversibili.



$\begin{cases} AB = \text{ESPANSIONE ISOTERMA REVERSIBILE } (T_2) \\ BC = \text{ISOCORA REVERSIBILE } (T_2, T_1, T_2) \\ CD = \text{COMPRESSIONE ISOTERMA REVERSIBILE } (T_1) \\ DA = \text{ISOCORA REVERSIBILE } (T_1, T_2) \end{cases}$

$$\begin{cases} Q_A = Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \\ Q_C = Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \end{cases}$$

Nota: isoterma BC si ha:

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = m c_v (T_1 - T_2)$$

Nota: isoterma DA si ha:

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = m c_v (T_2 - T_1) = -Q_{BC}$$

Il rendimento vale:

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{m R T_1 \ln(V_3/V_2)}{m R T_2 \ln(V_3/V_1)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

CICLO DI OTTO:



1) In DA la miscela benzina - aria viene aspirata nel cilindro con P. costante (FASE DI ASPIRAZIONE)

2) AB = TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE.

(FASE DI COMPRESSIONE)

3) BC $\rightarrow Q_C = m c_p (T_C - T_B) > 0 \rightarrow$ FASE DI COMBUSTIONE

4) CD $\rightarrow$ FASE DI ESPANSIONE.

5) DA $\rightarrow Q_A = m c_p (T_A - T_D)$ (FASE DI DECOMPRESSIONE).

6) DA $\rightarrow$ FASE DI VACUO.

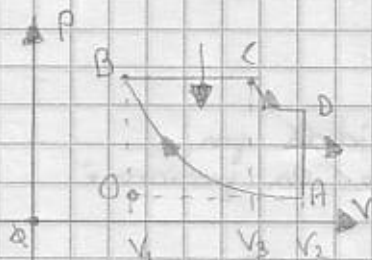
Il rendimento η :

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{m c_p (T_A - T_D)}{m c_p (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Indichiamo con: $R = \frac{V_2}{V_1} \rightarrow$ RAPPORTO DI COMPRESSIONE.

$$\eta = 1 - \frac{1}{R^{\gamma}}$$

CICLO DIESEL:



1) DA = FASE DI ASPIRAZIONE

2) AB = FASE DI COMPRESSIONE

3) BC = ISOBARA REVERSIBILE (FASE DI INIEZIONE E COMBUSTIONE)

Nota: trasformazione BC si ha: $Q_C = m c_p (T_C - T_B)$

4) CD $\rightarrow$ FASE DI ESPANSIONE

(58)

5) DA $\rightarrow$ FASE DI DECOMPRESSIONE (isotermo reversibile).

$$Q_c = m c_v (T_A - T_D)$$

6) AD $\rightarrow$ FASE DI SCARICO.

Il rendimento vale:

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} = 1 + \frac{m c_v (T_A - T_D)}{m c_p (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Potro:

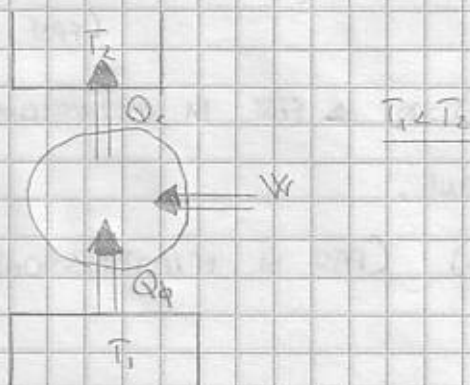
$$T_D V_2^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1}, \quad T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_1^{\gamma-1} \Rightarrow \begin{cases} R_c = \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \text{RAPPORTO DI COMPRESSIONE} \\ R_e = \frac{V_2}{V_3} \rightarrow \text{RAPPORTO DI ESPANSIONE} \end{cases}$$

Quindi:

$$\eta = 1 - \frac{T_D^{\frac{1}{\gamma}} - T_C^{\frac{1}{\gamma}}}{T_A^{\frac{1}{\gamma}} - T_B^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Il motore diesel ha rendimento maggiore del motore a scoppio.

• CICLI FRIGORIFERI: Il sistema assorbe calore e lo cede.



COEFFICIENTE DI PRESTAZIONE:

$$g = \frac{Q_a}{|W_r|}$$

Es: Ciclo di Carnot funziona all'indietro.

Potro:

$$Q_a = m R T_1 \ln \left(\frac{V_c}{V_b} \right)$$

$$Q_c = m R T_2 \ln \left(\frac{V_a}{V_b} \right)$$

$$W_r = Q_c + Q_a \Rightarrow g = \frac{Q_a}{|Q_c + Q_a|} = \frac{m R T_1 \ln \left(\frac{V_c}{V_b} \right)}{m R T_2 \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right) - m R T_1 \ln \left(\frac{V_c}{V_b} \right)}$$

Un gas reale si avvicina ad un gas ideale per quanto riguarda le componenti se la pressione è bassa e la temperatura è alta.

$$= \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$