

(3b)

Quindi:

$$e = \frac{P_1'_{fin}}{P_1'_{in}} = \frac{V_1'_{fin}}{V_1'_{in}} = \frac{P_2'_{fin}}{P_2'_{in}} = \frac{V_2'_{fin}}{V_2'_{in}} \rightarrow \text{COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE.}$$

Si noti che: $P_1'_{in} = P_2'_{in}$ e $P_1'_{fin} = P_2'_{fin}$.

Per quanto riguarda l'energia cinetica si ha:

$$E'_{c, fin} = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2_{fin} + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2_{fin} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 V_1'^2_{in} + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2_{in} \right)$$

Quindi non si conserva l'energia cinetica.

La variazione di energia cinetica è data da:

$$E'_{c, fin} = e^2 E'_{c, in}$$

$$\Delta = \frac{E'_{c, fin} - E'_{c, in}}{E'_{c, in}} = e^2 - 1$$

Abbiamo:

- $e = 1$, $\Delta = 0 \rightarrow$ URTO ELASTICO.
- $e = 0$, $\Delta = -1 \rightarrow$ URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO.
- $0 < e < 1 \rightarrow$ URTO ANELASTICO.

Si noti che $\Delta = 0 \rightarrow E'_{c, fin} - E'_{c, in} = 0 \rightarrow E'_{c, fin} = E'_{c, in} \rightarrow$ si conserva l'energia cinetica.

Inoltre:

$$V_1'_{fin} = V_1'_{in} - V_{cm} = -e V_1'_{in} = -e (V_1'_{in} - V_{cm})$$

$$V_2'_{fin} = V_2'_{in} - V_{cm} = -e V_2'_{in} = -e (V_2'_{in} - V_{cm})$$



$$V_1'_{fin} = V_{cm} (1+e) - e V_1'_{in}, \quad V_2'_{fin} = V_{cm} (1+e) - e V_2'_{in}$$

Siccome:

$$V_{cm} = \frac{m_1 V_1'_{in} + m_2 V_2'_{in}}{m_1 + m_2} \rightarrow \begin{cases} V_1'_{fin} = \frac{(m_1 - e m_2) V_1'_{in} + m_2 (1+e) V_2'_{in}}{m_1 + m_2} \\ V_2'_{fin} = \frac{m_1 (1+e) V_1'_{in} + (m_2 - e m_1) V_2'_{in}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Vediamo ora l'interazione gravitazionale. La gravitazione si basa su tre leggi:

- 1) 1° LEGGE: I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.



- 2) 2° LEGGE: La velocità angolare con cui il raggio vettore unisce il sole ad un pianeta è costante.

3) 3° LEGGE: Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore delle stesse: $T^2 = KR^3$.

Supponiamo le orbite circolari e quindi:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost.}$$

Siccome $R = \text{cost.} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cost.}$$

L'unica forza che agisce è centripeta e quindi: $F = m \omega^2 R = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R$. Siccome:

$$T^2 = KR^3 \Rightarrow F = \frac{4\pi^2}{K} \frac{m}{R^2}$$

La forza esercitata dal sole sui pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole. Consideriamo:



$$\begin{cases} \vec{F}_{S,T} = \frac{4\pi^2}{K_T} \frac{m_T}{R^2} \\ \vec{F}_{T,S} = \frac{4\pi^2}{K_S} \frac{m_S}{R^2} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{S,T} = \vec{F}_{T,S} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{K_T} \frac{m_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{K_S} \frac{m_S}{R^2}$$



$$R^2 \frac{4\pi^2}{K_T} \frac{m_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{K_S} m_S \Rightarrow \frac{4\pi^2}{K_T} = \frac{4\pi^2}{K_S} \frac{m_S}{m_T} \Rightarrow K_T m_S / m_T = 4\pi^2$$



$$K_S m_T = K_T m_S$$

Quindi:

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T K_S} = \frac{4\pi^2}{m_S K_T} \Rightarrow F = \gamma \frac{m_S m_T}{R^2}$$

γ è una forza di tipo attrattiva.

γ : COSTANTE UNIVERSALE.

Altrettanto:

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{U}_{1,2}$$



Caso particolare:



$$F = \gamma \frac{m_T m}{R_T^2}$$

$$\text{NB: } g = \gamma \frac{m_T}{R_T^2}$$

La forza gravitazionale è una forza centrale. È una forza che si manifesta a distanza. Quindi sulla superficie terrestre si ha:

$$m_i g = \gamma \frac{m_{T,E} m_i}{R_T^2}$$



$$g = \gamma \frac{m_{T,E}}{R_T^2} \frac{m_i}{m_i}$$

m_i : massa inerte.

$m_{T,E}$: massa gravitazionale.

$m_{T,E}$: massa " terrestre.

36

Scegliamo:

$$\vec{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{R^2} \vec{U}_{1,2} \right) m_2, \quad \vec{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{R^2} \vec{U}_{2,1} \right) m_1$$

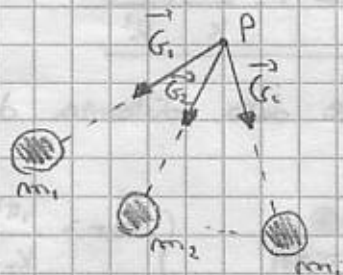


$$\vec{G}_1 = -\gamma \frac{m_1}{R^2} \vec{U}_1, \quad \vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{G}_1$$

$$\vec{G}_2 = -\gamma \frac{m_2}{R^2} \vec{U}_2, \quad \vec{F}_{2,1} = m_1 \vec{G}_2$$

Il vettore $\vec{G}$ prende il nome di CAMPO GRAVITAZIONALE.

Consideriamo:



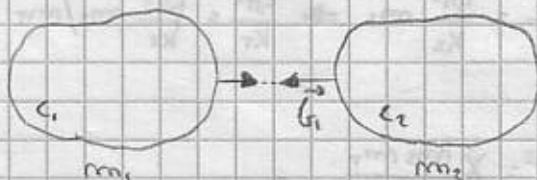
$$\vec{G}_i = -\gamma \frac{m_i}{R_i^2} \vec{U}_i$$

$$\vec{G}(P) = \sum_i \vec{G}_i = \sum_i \left(-\gamma \frac{m_i}{R_i^2} \vec{U}_i \right)$$

$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dm}{R^2} \vec{U} \Rightarrow \vec{G}(P) = \int_V -\gamma \frac{dm}{R^2} \vec{U} = \int_V -\gamma \rho \frac{dV}{R^2} \vec{U}$$

NB: $dm = \rho dV$

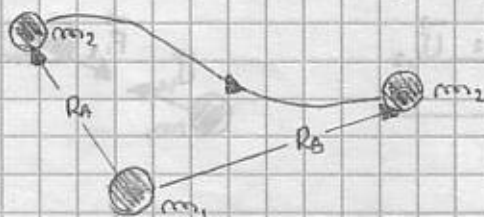
con ρ = DENSITA'. Consideriamo:



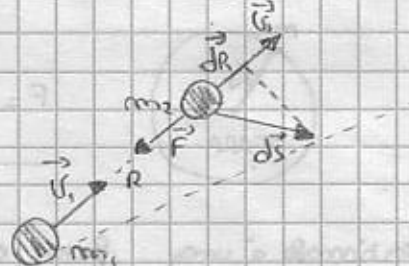
$$d\vec{F}_{1,2} = dm_2 \vec{G}_1$$

$$\vec{F}_{1,2} = \int_{C_2} \vec{G}_1 dm_2$$

La forza gravitazionale è conservativa. Infatti:



m_2 è nel campo di una massa m_1 .



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{U}_1 \cdot d\vec{s} =$$

$$W = \int_A^B dW = \int_{R_A}^{R_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} dR =$$

$$= -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_A} \right) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{R_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Quindi:

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R}$$

→ ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE.

Per $R \rightarrow \infty \Rightarrow F = E_p = ?$. Scrivendo: $E_p = m_2 V \Rightarrow V_1 = \frac{E_p}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{R}$
Quindi:

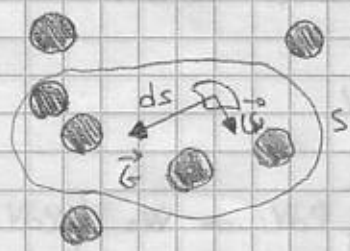
$$V_1(R) = -\gamma \frac{m_1}{R} \rightarrow \text{POTENZIALE GRAVITAZIONALE. (prodotto da } m_1).$$

Quindi:

$$V_r = -\Delta E_p = -m_2 \Delta V_1 = -m_2 (V_{1,B} - V_{1,A}) \Rightarrow \underline{\vec{G} = -\text{grad}(V) = -\nabla V}$$

- Se: $E > 0 \Rightarrow$ ORBITA IPERBOLICA
 $E = 0 \Rightarrow$ ORBITA PARABOLICA NB: $E = E_c + E_p$
 $E < 0 \Rightarrow$ ORBITA ELLITTICA

Consideriamo:



$$d\phi = \vec{G} \cdot \vec{U}_n ds$$

$$\Downarrow$$
$$\phi = \oint d\phi = \oint \vec{G} \cdot \vec{U}_n ds$$

ϕ si chiama FLUSSO DEL VETTORE $\vec{G}$ attraverso la superficie chiusa S. Inoltre:

$$\phi = 4\pi\gamma \sum_i m_i \rightarrow \text{TEOREMA DI GAUSS}$$

Tale teorema afferma che il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle masse interne alla superficie. Vediamo ora i fluidi. Con le teorie FLUIDO intendiamo i liquidi e i gas. Si ricorda che la densità dei liquidi è molto maggiore di quella dei gas. I liquidi sono incompressibili mentre i gas lo sono macroscopicamente.

$$\underline{dm = \rho dV} \text{ per ogni porzione di liquido.}$$

In un liquido esistono FORZE DI VOLUME proporzionali a dV come:

$$\underline{dF = g \cdot dm} \rightarrow \text{FORZA PESO.}$$

Inoltre:

$$\underline{dF = g \cdot dm = g \cdot \rho dV}$$

oppure FORZE DI SUPERFICIE come:

$$\underline{dF = P ds} \text{ dove } P = \text{PRESSIONE}$$

Quindi:

$$P = \frac{dF}{ds} \text{ o } P = \frac{F}{S} \rightarrow \text{non ha caratteristiche dimensionali.}$$

(28)

L'unità di misura della pressione è il PASCAL.

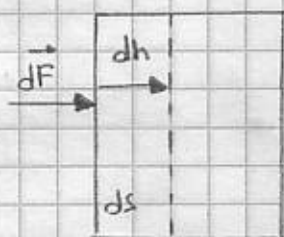
$$1 \text{ PASCAL} = 1 \text{ N/m}^2$$

Un multiplo del pascal è il BAR: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
 Inoltre:

$$P_{\text{atm}} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar} \quad \text{dove } P_{\text{atm}} = \text{Pressione ATMOSFERICA.}$$

La pressione in un punto di un fluido è una quantità scalare. Lo strumento che misura la pressione è il BAROMETRO. Consideriamo:

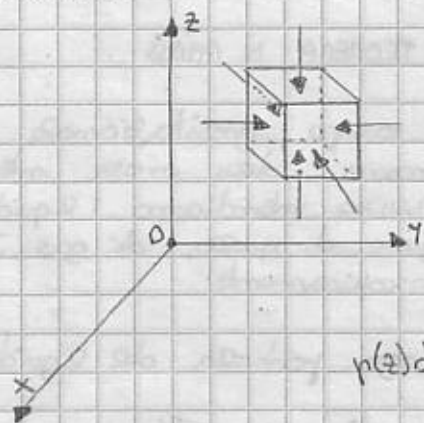
$$dF = P ds \quad \text{agisce ortogonalmemente su } ds.$$



$$dW = dF \cdot dh = P ds \cdot dh = P dV$$

$$\int_{V_0}^W dW = \int P dV \Rightarrow W = \int P dV$$

In un fluido, se tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, allora esso è in quiete. Consideriamo:



$$\vec{F}_p + \vec{F}_v = 0 \quad \text{dove: } \begin{cases} \vec{F}_p = \text{FORZE DI PRESSIONE} \\ \vec{F}_v = \text{FORZE DI VOLUME} \end{cases}$$

↘ equilibrio statico.

$$p(z) ds - p(z+dz) ds = ds \left(p(z) - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} dz ds = - \frac{\partial p}{\partial z} dV$$

Quindi: $P_2 dm = P_2 \rho dV$

La condizione di equilibrio si scrive:

Quindi:

$$- \frac{\partial p}{\partial z} dV + P_2 \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho P_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho P_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho P_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho P_z \quad \rightarrow \text{CONDIZIONI DI EQUILIBRIO.}$$

Riassumendo:

$$\vec{p} = \text{grad } p = \rho \vec{P}$$

Quindi se agiscono forze di volume $\vec{P}$ non può la pressione essere costante. Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa si ha:

$$\vec{P} = -\nabla E_{p.m.} \rightarrow \text{energia potenziale per unità di massa}$$

Quindi:

$$\vec{D}_p = \rho \vec{f} = -\rho \nabla E_{p,m}$$

Il gradiente della pressione ha la stessa direzione ma verso opposto del gradiente dell'energia potenziale. Siamo:

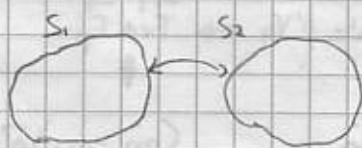
SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE: In ogni punto si ha la stessa energia potenziale.

SUPERFICIE ISOBARICA: Stessa pressione ovunque



Una superficie equipotenziale è isobarica e $p = \text{costante}$.

Infatti:

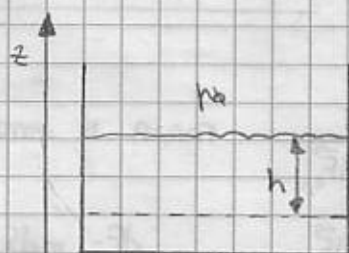


$$\begin{cases} |\vec{D}_p| = \left| \frac{dp}{dm} \right| \\ |\nabla E_{p,m}| = \left| \frac{dE_{p,m}}{dm} \right| \end{cases}$$

Quindi: $|\vec{D}_p| = \rho |\nabla E_{p,m}|$

Consideriamo:

$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ p_2 = p_0 \end{cases} \rightarrow$$



$p_0 = \text{PRESSIONE ESTERNA}$

$$\begin{cases} p_x = p_y = 0 \\ p_z = -\rho g \end{cases}$$

→ la pressione varia solo lungo l'asse z.

Infine:

$$(\vec{D}_p)_z = \frac{dp}{dz} \quad \text{e} \quad (\nabla E_{p,m})_z = \frac{dE_{p,m}}{dz} = g$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \int_1^2 dp = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Se $p = \text{cost} \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$

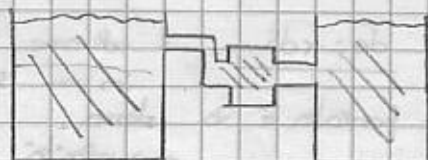
Alla profondità $z_1 = -h$ si ha: $p_2 - p_1 = p_0 - p(h) = -\rho g (z_2 - z_1) = -\rho g h$

La legge di Stevino dice che in un liquido con $\rho = \text{cost}$ la pressione cresce linearmente con la profondità.

LEGGE DI STEVINO

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

Infine il PRINCIPIO DI PASCAL dice che: $p = p_0 + \Delta p \Rightarrow$ se p_0 varia, varia anche p . Vediamo ora il PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI:



Il liquido è allo stesso livello nei due recipienti.

Consideriamo ora un generico fluido in equilibrio, sotto l'azione della gravità.

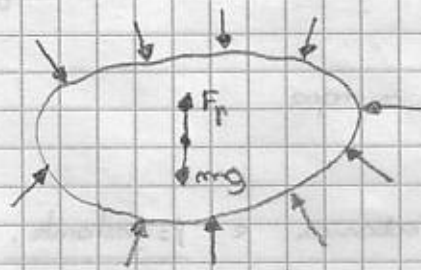


La risultante delle forze di pressione esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata è uguale ed opposta alla forza peso. Quindi:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_r = \vec{F}_p + m\vec{g} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{F}_p = -m\vec{g}}$$

dove:

$$m = \rho V_0$$



Se considero un'altra sostanza con $m' \Rightarrow m' = \rho' V_0 \Rightarrow \vec{F}_r + \vec{F}_p$
 Se $\rho' > \rho \Rightarrow$ corpo scende nel fluido.
 Se $\rho' < \rho \Rightarrow$ il corpo sale nel fluido.
 In entrambi i casi comunque il corpo subisce una spinta verso l'alto pari a:

$$(m' - m)\vec{g} = (\rho' - \rho)V_0\vec{g}$$

$$\underline{\vec{F}_a = -\rho V_0 \vec{g}} \rightarrow \text{PRINCIPIO DI ARCHIMEDE.}$$

Consideriamo:



FORZA DI ATTRITO INTERNO

$$dF = \eta ds \frac{dv}{dm}$$

dove: ds : area di contatto

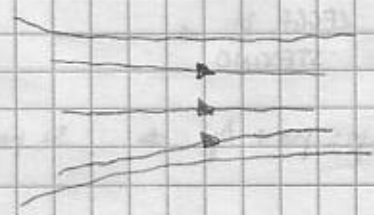
$\frac{dv}{dm}$: variazione relativa integrale a ds .

si misura in POISE.

η : viscosità del fluido (dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura).

η tende a essere aumentata dalla temperatura (nei liquidi). Nei gas η tende a essere aumentata dalla temperatura. Si chiama FLUIDO IDEALE un fluido in cui $\eta = 0$ e $\rho = \text{cost.}$ (NON VISCOSO e INCOMPRESSIBILE).

Consideriamo una sezione S :



— LINEE DI CORRENTE.

TUBO DI FLUSSO

Si definisce PORTATA DEL TUBO DI FLUSSO: $dg = \rho ds$ $\rightarrow$ volume di fluido che è passato in un secondo.

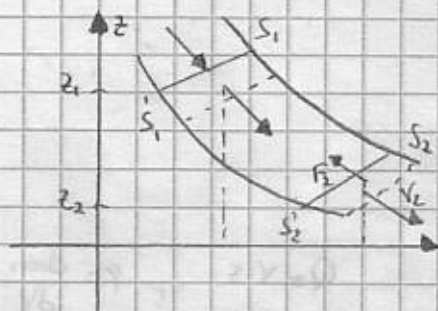
L'unità di misura è m^3/s .
 se $\rho = \text{cost.}$, e il regime è stazionario, la portata è la stessa.

Quindi:

$$V ds = \text{cost.} \Rightarrow q = \int_S dg = \int_S \rho ds = V_m S = \text{cost.}$$

$\rightarrow$ velocità media.

La proprietà fondamentale della dinamica dei fluidi ideali va sotto il nome di TEOREMA DI BERNOULLI.



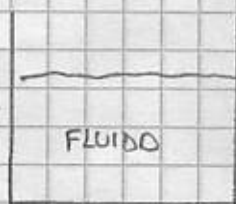
$$\rho = \text{cost.}$$

$$p = \text{cost.}$$

Siamo p la pressione in un punto a quota z e velocità v .

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost.}$$

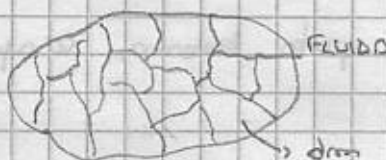
In breve lungo un tubo di flusso infinitesimo la somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume ($\rho g z$) e dell'energia cinetica per unità di volume è costante. Quindi ricapitolando:



Noi consideriamo fluidi PERFETTI cioè incompressibili e non viscosi.

Definiamo:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow \text{DENSITA'}$$



$\rho = \text{cost}$ $\Rightarrow$ FLUIDO INCOMPRESSIBILE.

Le forze che agiscono su un fluido possono essere di due tipi:

- 1) FORZE DI VOLUME $\rightarrow$ intensità proporzionale a dV . ($\rho \vec{g}$)
- 2) FORZE DI SUPERFICIE $\rightarrow$ per esempio la pressione.

La pressione gode della proprietà ISOTROPA cioè la pressione è indipendente dall'orientamento della superficie passante per il punto considerato.

Un fluido gode della seguente equazione:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = \vec{f}_r = \rho \vec{g} \quad \rightarrow \text{equazione della statica dei fluidi perfetti}$$

In particolare:

$$\vec{g} = -\text{grad } U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \Rightarrow \underline{dp = -\rho dU}$$

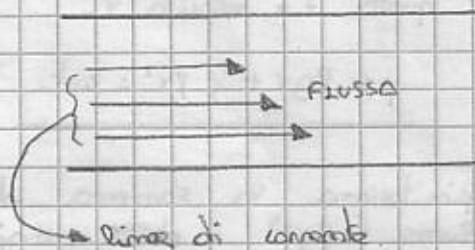
In un fluido perfetto una superficie ISOBARA è anche EQUIPOTENZIALE.
Si ricorda inoltre la legge di Stevin:

$$\underline{p(z) = p(z_0) + \rho g(z - z_0)} \rightarrow \text{la pressione cresce linearmente con la profondità se } \rho = \text{cost.}$$

(52)

In particolare la portata di flusso in un tubo si misura così:

$$Q = v \cdot S = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt}$$



$$Q = v \cdot S, \quad \rho = \frac{dm}{dv}$$

Da:

$$\frac{dm}{dt} = \rho v S$$

Infine il teorema di Bernoulli ci dice che:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost}$$

Si riconosce in questo teorema l'applicazione del principio di conservazione dell'energia.