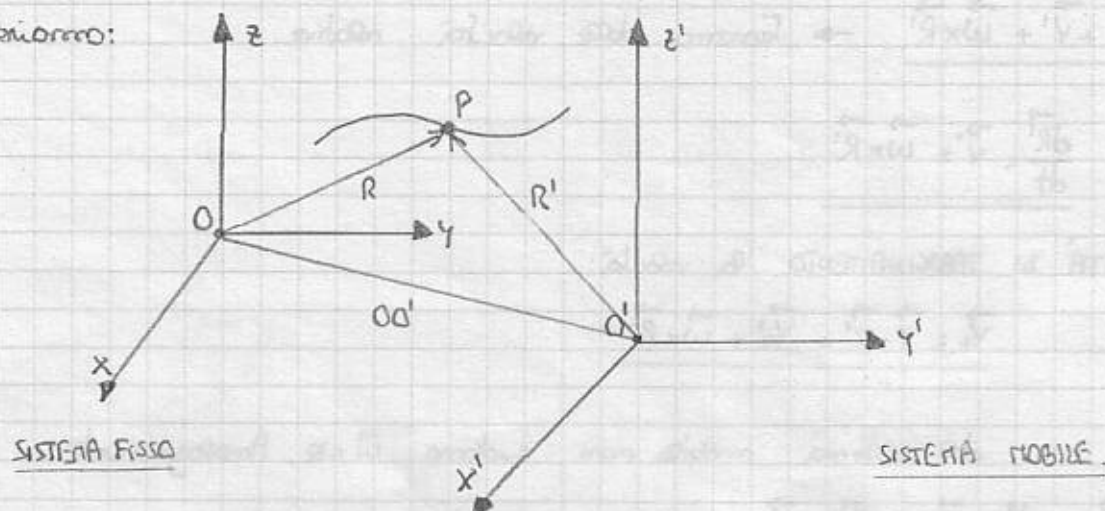


Consideriamo:



Per definizione si ha:

$$\vec{OO'} + \vec{R'} = \vec{R}$$

$$\text{con } \begin{cases} \vec{R} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \\ \vec{R'} = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'} \\ \vec{OO'} = x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y + z_0\vec{u}_z \end{cases}$$

Definiamo la VELOCITÀ RELATIVA come:

$$\vec{V'} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_{z'} \quad \rightarrow \text{per il sistema mobile}$$

Invece definiamo la velocità ASSOLUTA come:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad \rightarrow \text{per il sistema fisso}$$

Inoltre:

$$\vec{V_0} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \frac{dx_0}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy_0}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz_0}{dt} \vec{u}_z$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} &= \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{R'}}{dt} = \frac{dx_0}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy_0}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz_0}{dt} \vec{u}_z + \frac{dx'}{dt} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_{z'} \\ &\quad + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \\ &\downarrow \\ \vec{V} &= \vec{V_0} + \vec{V'} + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \end{aligned}$$

Sapendo che: $\frac{d\vec{R'}}{dt} \neq \vec{V'}$ e usando le FORMULE DI POISSON si ha:

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{x'}$$

$$\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{y'}$$

$$\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_{z'}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x'(\vec{\omega} \times \vec{u}_{x'}) + y'(\vec{\omega} \times \vec{u}_{y'}) + z'(\vec{\omega} \times \vec{u}_{z'}) = \\ &= \vec{\omega} \times (x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times \vec{R'} \end{aligned}$$

(2h)

Quindi:

$$\vec{V} = \vec{V}_0' + \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{R}' \rightarrow \text{Teorema delle velocità relative.}$$

In particolare:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{R}'$$

Definiamo VELOCITÀ DI TRASINAMENTO la velocità:

$$\vec{V}_t = \vec{V} - \vec{V}' = \vec{V}_0' + \vec{\omega} \times \vec{R}'$$

Si noti che se gli assi del sistema mobile non ruotano $\vec{\omega} = 0$. Analogamente:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{U}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{U}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{U}_z \rightarrow \text{ACCELERAZIONE ASSOLUTA.}$$

Invece:

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{U}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{U}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{U}_{z'} \rightarrow \text{ACCELERAZIONE RELATIVA.}$$

Inoltre:

$$\vec{a}_0' = \frac{d\vec{V}_0'}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_0'}{dt} + \frac{d\vec{V}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}'}{dt}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \vec{U}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{U}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \vec{U}_{z'} \right) = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{U}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{U}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{U}_{z'} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{U}_{x'}}{dt} \\ &\quad + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{U}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{U}_{z'}}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' \end{aligned}$$

Completando:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' + 2\vec{\omega} \times \vec{V}'$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}'}{dt} &= \vec{a}' + \frac{dx'}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{U}_{x'}) + \frac{dy'}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{U}_{y'}) + \frac{dz'}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{U}_{z'}) = \vec{a}' + \vec{\omega} \left(\frac{dx'}{dt} \vec{U}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{U}_{y'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{dz'}{dt} \vec{U}_{z'} \right) = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' \end{aligned}$$

Si ricambi inoltre che:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')$$

Infatti:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}' + \vec{V}' \Rightarrow \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}' + \vec{V}') = \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \vec{V}_0' &= \vec{V} - \frac{d\vec{R}'}{dt} \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}'}{dt} = \\ &= \vec{a}' + \vec{a}_0' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = \\ &= \vec{a}' + \vec{a}_0' + 2\vec{\omega} \times \vec{V}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') \end{aligned}$$

TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE.

Definiamo:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_0' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' \rightarrow \text{ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO.}$$

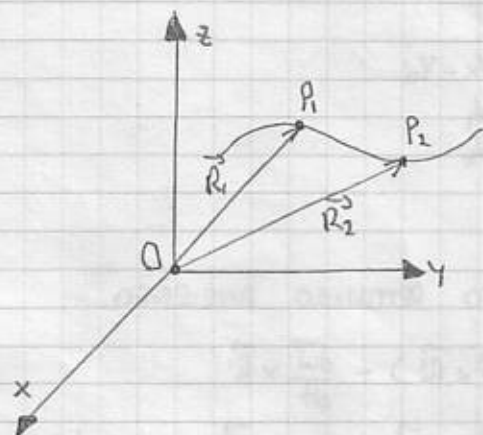
mentre:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \rightarrow \text{ACCELERAZIONE DI CORIOLIS.}$$

Quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Abbiamo due punti che si muovono in un sistema di riferimento inerziale, cioè in un sistema dove vale il principio di Newton.



Vogliamo studiare il moto di un punto visto da un altro punto. Quindi:

$$P_1: \vec{R}_1 = \vec{OP}_1, \vec{V}_1 = \frac{d\vec{R}_1}{dt}, \vec{a}_1 = \frac{d\vec{V}_1}{dt}$$

$$P_2: \vec{R}_2 = \vec{OP}_2, \vec{V}_2 = \frac{d\vec{R}_2}{dt}, \vec{a}_2 = \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

La posizione di P_2 relativa a P_1 è:

$$\vec{P_1P_2} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}_{2,1}$$

Quindi: $\vec{V}_2 = \vec{V}_{2,1} + \vec{V}_1$ dove $\vec{V}_{2,1}$ = velocità di P_2 rispetto a P_1 . Infatti:

$$\vec{V}_2 = \vec{V} - \vec{V}' = \vec{V}_0' + \vec{\omega} \times \vec{R}' \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_t = \vec{V}_{2,1}$$

Infatti $\vec{\omega} = 0$ in quanto non c'è rotazione degli assi. Analogamente:

$$\vec{a}_{2,1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

Si può anche scrivere:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{R}_{1,2}}{dt} = \frac{d\vec{R}_1}{dt} - \frac{d\vec{R}_1}{dt} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \\ \frac{d\vec{V}_{1,2}}{dt} = \frac{d\vec{V}_2}{dt} - \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \end{cases}$$

Consideriamo ora un sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale. Quindi:

$$\vec{\omega} = 0 \text{ (non c'è rotazione degli assi)}$$

$$\vec{a}_0' = 0 \Rightarrow \vec{V}_0' = \text{cost.}$$

Quindi:

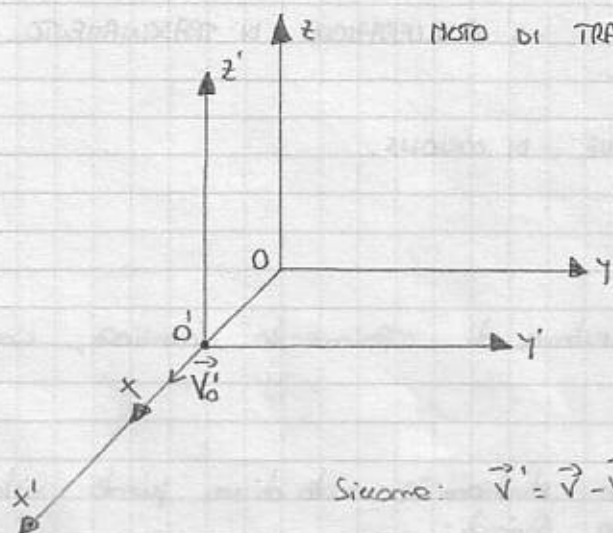
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$$

Se $\vec{a} = 0$ anche $\vec{a}' = 0$. Perciò tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale sono anch'essi inerziali. Se $\vec{a}_0' \neq 0$ oppure $\vec{\omega} \neq 0$ si ha:

$$\vec{F} = m\vec{a}_t + m\vec{a}_c = m\vec{a}'$$

Quindi sul punto agisce la forza vera più le forze APPARENTI, le quali non derivano

due interazioni fondamentali. Consideriamo:



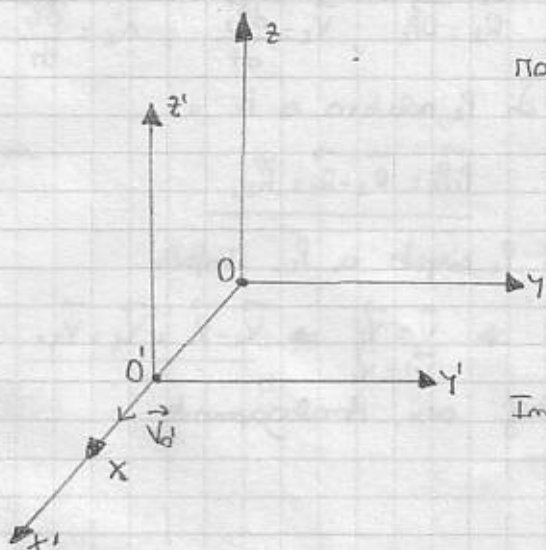
MOTO DI TRASLINAMENTO RETTILINEO UNIFORME.

$$\begin{cases} \vec{R}' + \vec{OO}' = \vec{R} \Rightarrow \vec{R} - \vec{OO}' = \vec{R}' \\ \vec{OO}' = \vec{V}_0 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - V_0 t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Siccome: $\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0 \Rightarrow \begin{cases} V'_x = V_x - V_0 \\ V'_y = V_y \\ V'_z = V_z \end{cases}$

Siccome $\vec{a} = \vec{a}' \Rightarrow$ entrambi i sistemi sono inerziali.



MOTO DI TRASLINAMENTO RETTILINEO ACCELERATO.

$$\vec{a}_T = \vec{a}_0' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}'$$

posto $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{a}_T = \vec{a}_0'$, sia $\vec{V}_{im} =$ velocità iniziale.

$$x_0' = V_{im}t + \frac{1}{2} a_T t^2, \quad V_0' = V_{im} + a_T \cdot t$$

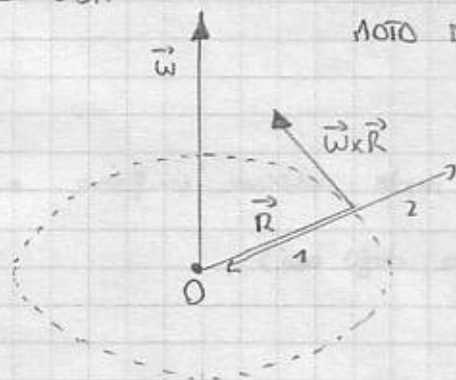
Inoltre:

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{OO}' \Rightarrow x' = x - V_{im}t - \frac{1}{2} a_T t^2, y' = y, z' = z$$

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0' \Rightarrow V'_x = V_x - V_{im} - a_T t, V'_y = V_y, V'_z = V_z$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0' \Rightarrow a'_x = a_x - a_T, a'_y = a_y, a'_z = a_z$$

Consideriamo ora:



MOTO DI TRASLINAMENTO ROTATORIO UNIFORME.

$$\begin{cases} 1: \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') \\ 2: -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') \end{cases}$$

Ipotesi che $\vec{V}_0' = \vec{a}_0' = 0$ e $\vec{\omega} =$ costante. Quindi:

$$\vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + 2\vec{\omega} \times \vec{V}' = \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{R}' = \vec{V}$$

Si ricordi che: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ma $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + 2\vec{\omega} \times \vec{V}' \Rightarrow F = m \cdot (\vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + 2\vec{\omega} \times \vec{V}')$

$$\vec{F} = m \cdot (\vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \vec{a}_c) \quad \text{dove} \quad \vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

De terminare $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = \vec{a}_{centr} \rightarrow$ ACCELERAZIONE CENTRIFUGA.

Quindi:

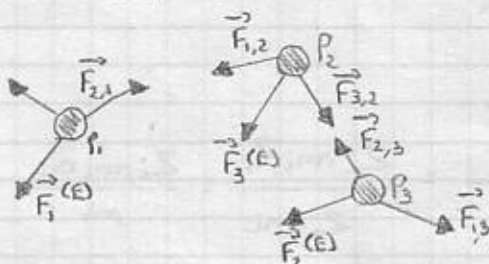
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{centr} + m \vec{a}_c = \vec{F}_{centr} + \vec{F}_c + m \vec{a}' \Rightarrow \underline{\vec{F} - \vec{F}_{centr} - \vec{F}_c = m \vec{a}'}$$

dove $\vec{F}_{centr}$ = FORZA CENTRIFUGA.

Per l'osservatore O il punto sul disco è in quiete, mentre per O' il punto si muove di moto circolare.

$$\begin{cases} O: \vec{v} = 0, \vec{a} = 0 \\ O': \vec{v}' = -\vec{\omega} \times \vec{R}, \vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \end{cases}$$

Siccome il moto è circolare la velocità è costante e pari a ωR mentre l'accelerazione (centripeta) è $\omega^2 R$. Consideriamo:



SISTEMA DI PUNTI MATERIALI.

$$\underline{\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \vec{F}_i^{(I)} = \text{FORZE INTERNE} \\ \vec{F}_i^{(E)} = \text{FORZE ESTERNE} \end{cases}$$

Simili alle forze interne possono essere di varia natura e possono essere conservative o meno. Simili da:

$$\underline{\vec{R}^{(I)} = \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} = 0}$$

Siamo:

$\vec{R}_i$ è vettore posizione
 $\vec{v}_i$ è vettore velocità
 $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m_i$ è vettore accelerazione
 $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ è vettore quantità di moto
 $E_{c,i} = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$ è energia cinetica

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \rightarrow \text{QUANTITÀ DI MOTO TOTALE}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i \rightarrow \text{MOMENTO ANGOLARE TOTALE}$$

$$E_c = \sum_i E_{c,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

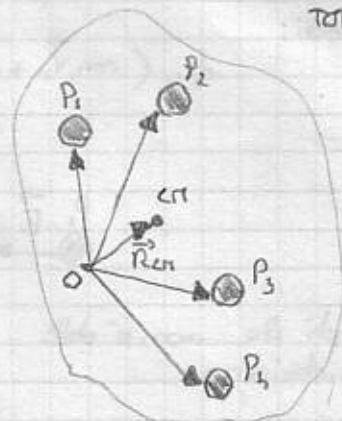
↓
ENERGIA CINETICA TOTALE

Definiamo CENTRO DI MASSA:

$$\underline{\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2 + \dots + m_m \vec{R}_m}{m_1 + m_2 + \dots + m_m}}$$

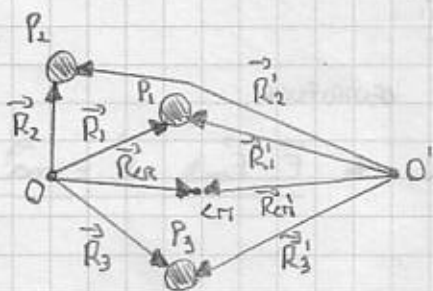
In particolare: $x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$



(29)

La posizione del centro di massa è indipendente dal sistema di riferimento scelto.



$$\vec{R}_i = \vec{R}_i' + \vec{OO}' \Rightarrow \vec{R}_i' = \vec{R}_i - \vec{OO}'$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{R}_i' + \vec{OO}')}{\sum_i m_i} = \\ &= \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i'}{\sum_i m_i} + \vec{OO}' = \vec{R}_{cm}' + \vec{OO}' \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{R}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m} \quad \text{e} \quad m = \sum_i m_i = \text{MASSA TOTALE DEL SISTEMA.}$$

Quindi: $\vec{P} = m \vec{V}_{cm}$.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{d^2 \vec{R}_{cm}}{dt^2} = \frac{\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}$$

Se il sistema di riferimento è inerziale si ha:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\downarrow$$

$$m \vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} = \vec{R}^{(E)} + \vec{R}^{(I)} = \vec{R}^{(E)}$$

Quindi: $\vec{R}^{(E)} = m \vec{a}_{cm} \rightarrow$ TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA.

Inoltre: $\vec{R}^{(E)} = m \vec{a}_{cm} = m \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{V}_{cm}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Quindi il moto del centro di massa è determinato solo dalla parte esterna.

Se: $\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0, \vec{V}_{cm} = \text{cost} \text{ e } \vec{P} = \text{cost} \rightarrow$ PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

Consideriamo due punti isolati che interagiscono fra loro:

$$\vec{P} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cost.}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2) = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

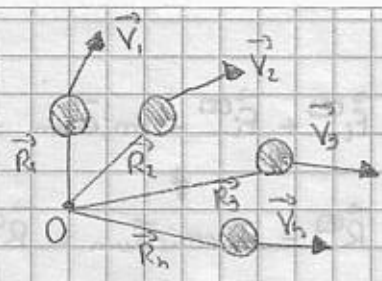


Si noti che non è detto che le due forze abbiano la stessa linea di azione. Consideriamo:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Quindi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{R}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$



Perciò:

$$\frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0 \Rightarrow m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(C)}$$

Perciò:

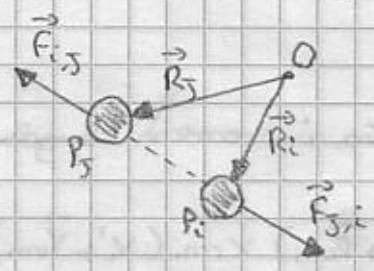
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{R}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(C)}) = \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{v}_0 \times m_i \vec{v}_i \\ &+ \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{(C)} = -\vec{v}_0 \times m \vec{v}_{cm} + \vec{\Pi}^{(E)} + \vec{\Pi}^{(C)} \end{aligned}$$

Simili a:

$$\vec{\Pi}^{(E)} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

$$\vec{\Pi}^{(C)} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{(C)}$$

Consideriamo:



Dimostriamo che $\vec{\Pi}^{(C)} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{ij}^{(C)} &= \vec{R}_{ij} \times \vec{F}_{ij} + \vec{R}_{ji} \times \vec{F}_{ji} = (\vec{R}_{ij} - \vec{R}_{ji}) \times \vec{F}_{ij} = \\ &= \vec{R}_{ij} \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

Il vettore $\vec{R}_{ij}$ è parallelo a $\vec{F}_{ij}$ e quindi $\vec{\Pi}_{ij}^{(C)} = 0$. Quindi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Pi}^{(E)} - \vec{v}_0 \times m \vec{v}_{cm}$$

Se $\vec{v}_0 \times m \vec{v}_{cm} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Pi}^{(E)}$$

cosa che accade quando il polo è fisso, o quando il centro di massa è in quiete, o se il polo coincide con il centro di massa o se $\vec{v}_0$ è parallelo a $\vec{v}_{cm}$.

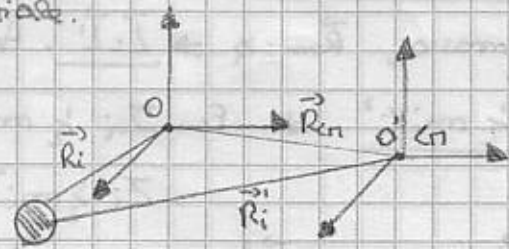
TEOREMA DI CONSERVATIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Se $\vec{R}^{(E)} = 0$ si conserva sia il momento angolare sia la quantità di moto. Spesso è utile considerare il sistema di riferimento del centro di massa.

- L'origine è nel centro di massa.
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione.
- È un sistema non inerziale.

Con $\omega = 0$ si ha:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}$$



$$\vec{R}_i = \vec{R}_i' + \vec{R}_{cm}$$

$$\begin{cases} \vec{R}_{cm}' = 0 \\ \vec{v}_{cm}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{R}_i' = 0 \text{ e } \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

(20)

Si ricondotti però a:

$$\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(C)} - m_i \vec{a}_{cm} = m_i \vec{a}_i' \quad \text{NB: } -m_i \vec{a}_i' = -m_i' \vec{a}_{cm}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{R}^{(E)} - \sum_i m_i \vec{a}_{cm} = \vec{R}^{(E)} - m \vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i' = \vec{0}$$

Quindi: $\sum_i m_i \vec{a}_i' = \vec{0}$. Analogamente:

$$\sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{(C)} - \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{a}_{cm} =$$

$$= \vec{\Pi}^{(E)} - (\sum_i m_i \vec{R}_i) \times \vec{a}_{cm} = \vec{\Pi}^{(E)}$$

Il momento angolare rispetto al centro di massa è:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{R}_i \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{R}_i$$

$$\times m_i \vec{v}_{cm} = \vec{L}' + (\sum_i m_i \vec{R}_i) \times \vec{v}_{cm} = \vec{L}'$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Pi}^{(E)}$$

I TEOREMI DI KÖNIG stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche. Consideriamo:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{R}_i' + \vec{R}_{cm}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) =$$

$$= \sum_i \vec{R}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{R}_i' \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{R}_{cm} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{R}_{cm}$$

$$\times m_i \vec{v}_{cm}$$

Si noti che:

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{R}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \text{momento angolare rispetto al centro di massa}$$

Inoltre:

$$\left. \begin{aligned} (\sum_i m_i \vec{R}_i') \times \vec{v}_{cm} \\ \vec{R}_{cm} \times (\sum_i m_i \vec{v}_i') \end{aligned} \right\} = \vec{0}$$

mentre

$$\vec{R}_{cm} \times m \vec{v}_{cm} = \vec{R}_{cm} \times \vec{P} \rightarrow \text{MOMENTO ANGOLARE DEL CENTRO DI MASSA}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R}_{cm} \times m \vec{v}_{cm} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}$$

Se il polo è il centro di massa, $\vec{R}_{cm} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}'$. Analogamente:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \Rightarrow E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm})^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \frac{1}{2} 2 m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm}$$

Quindi:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm}$$

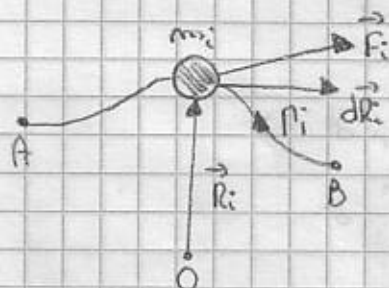
Concludendo:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{cm} = Q \Rightarrow E_c = E_c' + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 = E_c + E_{c,cm}$$

Quindi:

$$\text{ROT}_{TOT} = \text{ROT}_{cm} + \text{ROT}_{RISPETTO A cm} \rightarrow \text{è la scomposizione usata da König.}$$

Calcoliamo ora le variazioni in un sistema di punti.



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{R}_i = \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{R}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{R}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

$$\text{Quindi: } W = W^{(E)} + W^{(I)}$$

$$\text{Similmente: } dW_i^{(I)} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{R}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{R}_i = \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{R}_j - \vec{R}_i) = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{R}_j - d\vec{R}_i) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

Quindi le forze interne non è nulla. Se $W^{(I)} = Q \Rightarrow$ CORPO RIGIDO. Infatti in un corpo rigido le distanze tra i punti sono fisse. Siccome:

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{c,B} - E_{c,A}$$

Quindi:

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{c,B} - E_{c,A} = \Delta E_c \rightarrow \text{TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA PER SISTEMI DI PUNTI MATERIALI.}$$

Se le forze interne sono conservative si ha:

$$W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$$

e analogamente:

$$W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$$

Quando tutte le forze $F^{(I)}$ ed $F^{(E)}$ sono conservative si ha: $W = \Delta E_c = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$
Se non tutte le forze in gioco sono conservative si ha:

$$(E_c + E_p)_B - (E_c + E_p)_A = W_{nc}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA DEL SISTEMA.

$$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B = \text{costante}$$

Vediamo ora gli urti. Durante l'urto tra due corpi agiscono forze molto intense che sono forze IMPULSIVE. Tali forze sono forze interne, e quindi in assenza di forze esterne la quantità di moto si conserva. Siccome:

$$\left. \begin{matrix} v_{1,im} \\ v_{2,im} \end{matrix} \right\} \text{velocità di due punti prima dell'urto.}$$

(32)

$\left. \begin{matrix} V_{1, \text{fin}} \\ V_{2, \text{fin}} \end{matrix} \right\}$ velocità dei due corpi dopo urto.

Si ha:

$$\vec{P}_{\text{in}} = m_1 \vec{V}_{1, \text{in}} + m_2 \vec{V}_{2, \text{in}} = m_1 \vec{V}_{1, \text{fin}} + m_2 \vec{V}_{2, \text{fin}} = \vec{P}_{\text{fin}} \rightarrow \text{CONSERVAZIONE DEL MOTO}$$

In particolare:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{\text{cm}} = \vec{P}_{\text{in}} = \vec{P}_{\text{fin}} = \text{cost.}$$

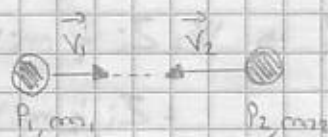
In particolare:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{V}_{1, \text{fin}} - m_1 \vec{V}_{1, \text{in}} &= \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1} dt \\ m_2 \vec{V}_{2, \text{fin}} - m_2 \vec{V}_{2, \text{in}} &= \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2} dt \end{aligned}$$

Si noti che:

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \Rightarrow \vec{J}_{2,1} = -\vec{J}_{1,2}$$

Se la durata dell'urto è sufficientemente piccola, e le forze esterne non sono impulsive, la quantità di moto totale è conservata. Trattiamo l'URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO:



Dopo l'urto i due punti restano attaccati formando un corpo di massa $m_1 + m_2$.

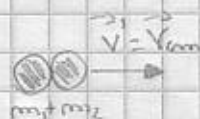
$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}' = (m_1 + m_2) \vec{V}_{\text{cm}} \Rightarrow \vec{V}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}$$

Quindi $\vec{V}_{\text{cm}}$ resta invariata durante l'urto.

Analogamente:

$$E_{c, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = E_c + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\text{cm}}^2$$

Dopo l'urto si ha:



Per quanto riguarda l'energia cinetica è stata usata la formula di König:

$$E_c = \frac{1}{2} m_i V_i^2 \Rightarrow E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_i' + \vec{V}_{\text{cm}})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{\text{cm}}^2 + \sum_i m_i \vec{V}_i' \cdot \vec{V}_{\text{cm}}$$

Quindi:

$$E_{c, \text{in}} = E_c + E_{c, \text{cm}}$$

Analogamente:

$$E_{c, \text{fin}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\text{cm}}^2 < E_{c, \text{in}}$$

Viene assorbita E_c' .

$$\Delta E_c = E_{c, \text{fin}} - E_{c, \text{in}} = -E_c' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\text{cm}}^2 - \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Le forze interne che si sviluppano nell'urto non sono conservative.

Note: URTO ELASTICO, si conserva anche l'energia cinetica del sistema. Quindi le forze interne sono conservative.



Quindi:

$$\begin{cases} m_1 v_{1,im} + m_2 v_{2,im} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{cm} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,im}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,im}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v'_{1,im} = -m_2 v'_{2,im} \\ m_1 v'_{1,fin} = -m_2 v'_{2,fin} \end{cases} \rightarrow \text{si considera una nel sistema di riferimento del centro di massa.}$$

Quindi: $\frac{1}{2} m_1 v_{1,im}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,im}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$

$$\begin{cases} v'_{1,fin} = -v'_{1,im} \\ v'_{2,fin} = -v'_{2,im} \end{cases} \rightarrow \text{stesso nel sistema centro di massa.}$$

Passiamo nel sistema inerziale e otteniamo:

$$\begin{cases} v_{1,im} = v'_{1,im} + v_{cm} \\ v_{1,fin} = v'_{1,fin} + v_{cm} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{2,im} = v'_{2,im} + v_{cm} \\ v_{2,fin} = v'_{2,fin} + v_{cm} \end{cases}$$

Siccome:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1,im} + m_2 v_{2,im}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \begin{cases} v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1,im} + 2m_2 v_{2,im}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,fin} = \frac{2m_1 v_{1,im} + (m_2 - m_1) v_{2,im}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Infatti:

$$v_{2,im} = v'_{2,im} + \frac{m_1 v_{1,im} + m_2 v_{2,im}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \text{Siccome: } v_{1,fin} = v'_{1,fin} + v_{cm}$$

Quindi:

$$v_{1,fin} = -v'_{1,im} + \frac{m_1 v_{1,im} + m_2 v_{2,im}}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1,im} + 2m_2 v_{2,im}}{m_1 + m_2}$$

Analogamente per $v_{2,fin}$.

Note: urto ANELASTICO, i punti si separano dopo l'urto, e si conserva la quantità di moto, ma non l'energia cinetica.

