

(12)

$$y_{\max}(x_{\max}) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{V_0^2 \cos^2 \theta \tan \theta}{g} - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{V_0^2 \cos^2 \theta \tan \theta}{g} \right)^2 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} - \frac{V_0^2 \cos^2 \theta \tan^2 \theta}{2V_0^2 \cos^2 \theta g} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} - \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{2V_0^2 \sin^2 \theta - V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

L'angolo di lancio per la gittata massima è:

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2V_0^2}{g} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ e } x_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$$

Il tempo totale di volo è:

$$t_{\text{tot}} = \frac{2x_{\max}}{V_0 \cos \theta} = \frac{2V_0 \sin \theta}{g} = 2t_0$$

Quindi nella cinematica abbiamo visto i vari tipi di moti indipendentemente dalla causa che lo determina. Invece nella DINAMICA analizzeremo proprio tali cause introducendo il concetto di forza. La dinamica si basa su 3 principi:

1) PRINCIPIO DI INERZIA: Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità (resta in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme).

2) FORMULA DI NEWTON: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$ valida nei sistemi INERTIALI.

3) PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE:



Simili alla legge di Newton è valida solo nei sistemi inerziali quando la velocità del corpo è molto minore della velocità della luce. Si definisce:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow \text{QUANTITÀ DI MOTO}$$

$$\text{Somma: } \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ e } \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v}$$

Inoltre:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} \cdot dt = \int_{p_0}^p d\vec{p} \Rightarrow \vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot dt = \Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 \quad \vec{F} \cdot dt = d\vec{p} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Il vettore $\vec{J}$ prende il nome di IMPULSO. Quindi: $\vec{J} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m \Delta \vec{v}$

Se $\vec{F} = \text{cost}$ si ha:

$$\vec{F} \int_{t_0}^t dt = \Delta \vec{p} \Rightarrow F(t - t_0) = \Delta \vec{p} \Rightarrow \text{se } t_0 = 0 \Rightarrow F \cdot t = \Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}$$

$$\text{Quindi: } \Delta \vec{v} = (\vec{v} - \vec{v}_0) = \frac{Ft}{m}$$

Si definisce FORZA MEDIA: $\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{t}$ e se $\Delta \vec{p} \Rightarrow \vec{p} = \text{cost} \Rightarrow$ PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO. (13)



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \text{EQUILIBRIO STATICO}$$

In generale: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m = \sum_i \vec{F}_i$

Quindi: $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$

Se $\vec{R} = 0 \Rightarrow$ l'equilibrio statico

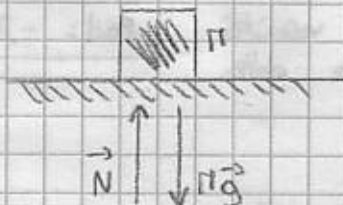
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

In componenti cartesiane: $R_x = R_y = R_z = 0 \Rightarrow \sum_i F_{ix} = 0$

$$\sum_i F_{iy} = 0$$

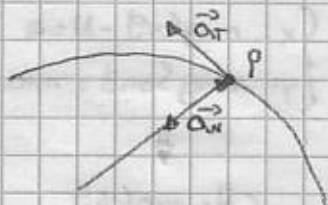
$$\sum_i F_{iz} = 0$$

Si chiama REAZIONE VINCOLE questa forza esercitata dall'ambiente esterno sul corpo.



$\vec{N}$: reazione vincolare.

Un altro tipo di forza è la FORZA CENTRIFUGA. $\vec{F} = m\vec{a}_r + m\vec{a}_n = m \frac{dV}{dt} \vec{U}_r + m \frac{V^2}{R} \vec{U}_n$



$\vec{F}_r$ = forza tangenziale.

Si chiama FORZA PESO questa forza diretta verso il basso.

$\vec{F} = m\vec{a}$ e $\vec{P} = m\vec{g}$ dove $\begin{cases} \vec{P} = \text{forza peso} \\ \vec{g} = \text{accelerazione gravitazionale} \end{cases}$

In generale $\vec{a} \neq \vec{g}$. Consideriamo:



Il corpo di massa m inizia a muoversi solo quando:

$$F_2 > \mu_s N$$

μ_s = COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO.

$\vec{F} = F \sin \theta + F \cos \theta = F_1 + F_2$ in quanto: $\begin{cases} F_1 = F \sin \theta \\ F_2 = F \cos \theta \end{cases}$

Quindi: $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = 0 \Rightarrow N - P + F_2 = 0$

$$N = P - F_1 = P - F \sin \theta$$

12

Analizziamo: $\vec{F}_{as} + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_{as} = +F \cos \theta$ dove $\vec{F}_{as}$ = FORZA DI ATRITO STATICO
La condizione di quiete si scrive:

$$\vec{F}_{as} \geq \vec{F}_2 \Rightarrow \mu_s N \geq F \cos \theta \Rightarrow \mu_s (P - F \sin \theta) \geq F \cos \theta$$

$$\downarrow$$

$$F \leq \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

Quando il corpo entra in movimento, si oppone la forza di ATRITO DINAMICO:

$$\vec{F}_{ad} = \mu_d N \quad \text{dove } \mu_d = \text{COEFFICIENTE DI ATRITO DINAMICO.}$$

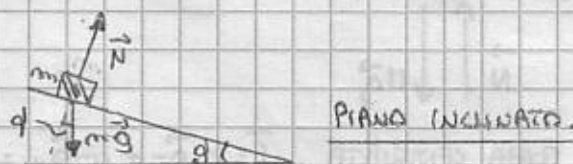
In generale:

$$\mu_d < \mu_s$$

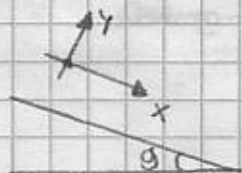
Quindi:

$$F \cos \theta - \mu_d N = ma$$

Tale forza è sempre opposta alla velocità: $\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \vec{v}$.
Una superficie priva di attrito viene detta
LISA consideriamo:



Se agisce solo la forza peso si ha: $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow$



$$\begin{cases} x: mg \cos \theta - N = 0 \\ y: mg \sin \theta = ma \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta \\ a = g \sin \theta < g \end{cases}$$

Se esiste un attrito tra il corpo e il piano, si ha:

$$mg \sin \theta \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \text{il moto non ha inizio.}$$



$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq \mu_s \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s$$

Aumentando l'angolo θ di inclinazione si ha moto. Inoltre:

$$mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = ma \Rightarrow a = (\sin \theta - \mu_d \cos \theta) g$$

Chiaramente:

$$(\sin \theta - \mu_d \cos \theta) > 0 \Rightarrow \sin \theta > \mu_d \cos \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > \mu_d$$

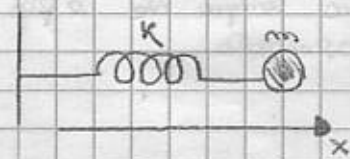


$$\mu_d < \tan \theta$$

Se $\mu_d = \tan \theta \Rightarrow$ moto uniforme.

Si noti che se il corpo si muove con una velocità iniziale, si può avere anche se $\rho > \rho_g$.

Consideriamo ora:



$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x \rightarrow \text{FORZA ELASTICA}$$

$K = \text{costante elastica}$.

$$F = -kx\vec{u}_x \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- CASI:
- $\rho > \rho_g \Rightarrow$ MOLLA IN ESTENSIONE
 - $\rho = \rho_g \Rightarrow$ MOLLA IN COMPRESSIONE
 - $\rho < \rho_g \Rightarrow$ MOLLA IN RIPOSO

NB: $\rho_g =$ densità della molla a riposo.

Quindi:

$$\rho > \rho_g \Rightarrow F = -k(\rho - \rho_g) = -kx$$

Caso particolare:



Possiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 = -\vec{F}_4 \end{cases} \quad \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Nota: $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ con: $x_0 = A \sin \phi$
 $\dot{x} = \omega A \cos \phi \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ \dot{x} = -\omega x_0 \sin \omega t \end{cases}$

Si ricordi che: $x(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$

Consideriamo ora:



$$\vec{F} = -b\vec{v} \rightarrow \text{FORZA DI ATTIRIO VISCOSO}$$

$$\vec{a} = \frac{-b\vec{v}}{m}$$

In presenza di forze di attrito viscoso non è possibile realizzare la condizione di equilibrio. Queste forze sono esercitate su corpi che si muovono nei fluidi. Sia:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= m\vec{g} \\ \vec{F}_2 &= -mk\vec{v} \end{aligned} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{g} - mk\vec{v} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

con le condizioni iniziali $x_0 = x$ e $\dot{x} = v$ per $t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k} \ln(g - kv) \Big|_0^v = t$$

16

$$m(g - kv) = -kt \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

Analizziamo ora la TENSIONE DI UN FILLO.



Ma supponiamo sempre che il filo sia inestensibile e di massa trascurabile.

Consideriamo questo esempio:



$$T = mg$$

$$T = -T \text{ e } -T = N \Rightarrow N = -mg$$

Un caso interessante di studio è la MACCHINA DI ATWOOD:



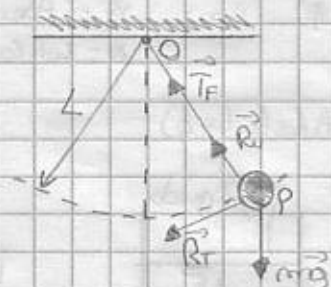
$$\text{equilibrio statico: } \begin{cases} T = m_1 g \\ T = m_2 g \end{cases}$$

Analizziamo ora il PENDOLO SEMPLICE.



EQUILIBRIO STATICO

$$T_f = mg$$



$$\vec{mg} + \vec{T_f} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} R_t = -mg \sin \theta = m a_t \\ R_u = T_f - mg \cos \theta = m a_u \end{cases}$$

$$R_t = \text{forza di RICHIAMO. In particolare: } a_t = \frac{1}{L} \frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta, \quad a_u = \frac{v^2}{L}$$

Si ricorda infatti che:

$$d = \frac{a_t}{R} \Rightarrow d \cdot R = a_t \text{ con } d = \frac{ds}{dt}$$

Siccome:

$$m a_t = -mg \sin \theta \Rightarrow a_t = -g \sin \theta \Rightarrow -g \sin \theta = \frac{1}{L} \frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Consideriamo piccoli valori di $\theta \Rightarrow \sin \theta \approx \theta = \frac{s}{L} \Rightarrow$ per piccole oscillazioni:

$$NB: g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{L} s = 0$$

Si ricordi però che:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \text{è equazione del moto armonico.}$$

Quindi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \quad \text{con } \omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Analogamente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

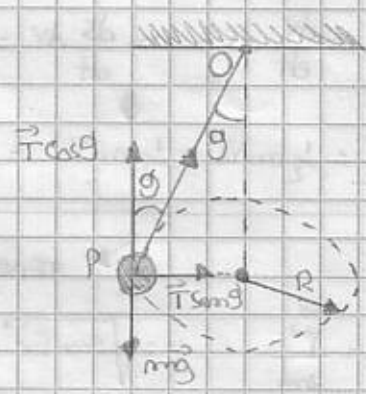
La legge oraria:

$$s = L\theta = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{mentre: } \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

NB: $s = L\theta$.

$$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Analizziamo il PENDOLO CONICO:



Sul punto P agiscono:

$$\begin{cases} T \sin \theta = m \frac{v^2}{L} \\ T \cos \theta = mg \end{cases}$$

Siccome:

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = \frac{mv^2}{L} \Rightarrow T \sin \theta = \frac{mv^2}{L}$$

Si ha:

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 L}$$

In particolare:

$$\omega^2 = g/L \quad \text{e} \quad T = \frac{mg}{\cos \theta} = m\omega^2 L$$

Infatti:

$$v = \omega R \quad \text{ed} \quad R = L \sin \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{v^2}{Lg} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{Lg} \Rightarrow \cos \theta \frac{\omega^2 R^2}{Lg} = \sin \theta$$

Quindi:

$$\omega^2 L \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} g \Rightarrow \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 L}$$

$$\cos \theta \frac{\omega^2 L^2 \sin^2 \theta}{Lg} = \sin \theta$$

Consideriamo ora:



Quindi:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds$$

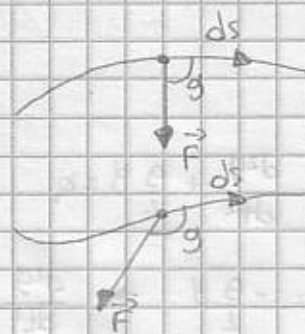
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \theta ds = \int_A^B F ds$$

$W = \text{LAVORO}$

Possiamo accadere 3 casi:

$$1) \theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow W < 0 \Rightarrow \text{LAVORO RESISTENTE}$$

(15)

2) $\theta = \pi/2 \Rightarrow W=0 \Rightarrow$ LAVORO NULLO3) $\theta < \pi/2 \Rightarrow W > 0 \Rightarrow$ LAVORO MOTORE

LAVORO RESISTENTE.

Consideriamo $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$ forze:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m) \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_3 \cdot d\vec{s} + \dots + \int_A^B \vec{F}_m \cdot d\vec{s} = W_1 + \dots + W_m$$

Si definisce POTENZA:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_T \cdot v \Rightarrow \text{POTENZA ISTANTANEA.}$$

Si definisce POTENZA MEDIA:

$$P_m = \frac{W}{t}$$

Riconsideriamo: $dW = F_T ds = m a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$

$$W = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{c,B} - E_{c,A} = \Delta E_c$$

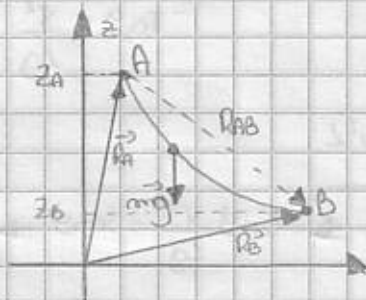
 E_c viene detta ENERGIA CINETICA.

Si noti che:

TEORIA DELL'ENERGIA CINETICA

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \text{ e } \vec{p} = m \vec{v} \Rightarrow E_c = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad \left(p = \sqrt{2m E_c} \right)$$

Consideriamo ora la forza peso.



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{R}_{AB} = m g \vec{R}_{AB}$$

Si noti che: $\vec{R}_B - \vec{R}_A = \vec{R}_{AB}$

$$\text{Quindi: } -m g (z_B - z_A) \Rightarrow W = -(m g z_B - m g z_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

Si definisce:

$$E_p = m g z \Rightarrow \text{ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO.}$$

Quindi in generale se $\vec{F} = \text{cost} \Rightarrow W = -(F z_B - F z_A) = -\Delta E_p$.

Teoriamo di una forza elastica e:

$$\vec{F} = -k x \vec{u}_x \Rightarrow W = \int_A^B -k x \vec{u}_x \cdot d\vec{s} = -k \int_A^B x dx = -\frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = -\Delta E_p$$

dove $E_p = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$ ENERGIA POTENZIALE ELASTICA.

Per quanto riguarda ora la forza di attrito radente si ha:

$$W_c = \int_A^B \vec{F}_{cd} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\vec{F}_d \cdot N \vec{U}_v \cdot d\vec{s} = -\vec{F}_d N \int_A^B d\vec{s}$$

Si noti che $\int_A^B d\vec{s}$ è la traiettoria effettiva del punto materiale. Quindi:

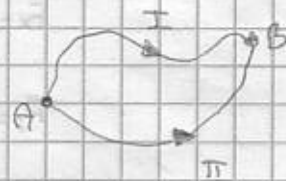
$$W_c = -\vec{F}_d N \int_A^B d\vec{s} \rightarrow S_{cd} = E_{c,A} / \vec{F}_d N$$

La parte per cui il lavoro non dipende dal tipo di traiettoria vengono dette FORZE CONSERVATIVE (Es: forza peso, forza elastica). Quella parte per cui il lavoro dipende dal tipo di traiettoria vengono dette FORZE NON CONSERVATIVE. Quindi:

per le forze conservative $\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Si noti che:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Per un percorso chiuso, si ha:

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I + \int_B^A (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I - \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



Per tutte le forze conservative vale:

$$W_c = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

Per le forze non conservative non vale il concetto di energia potenziale. Se agiscono solo forze conservative si ha:

$$W_c = \Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A}, \quad W_c = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Uguagliando:

$$E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B} \rightarrow E_{c,B} + E_{p,B} = E_{c,A} + E_{p,A}$$



$$E_m = E_c + E_p = \text{cost}$$

dove E_m : ENERGIA MECCANICA

principio di conservazione dell'energia meccanica.

Quando agiscono sia forze conservative che forze non conservative si ha:

$$W = W_c + W_{nc} \quad \text{dove: } \begin{cases} W_c = \text{LAVORO FORZE CONSERVATIVE} \\ W_{nc} = \text{LAVORO FORZE NON CONSERVATIVE} \end{cases}$$

Quindi:

28

$$E_{p,A} - E_{p,B} + W_{me} = E_{c,B} - E_{c,A} \rightarrow W_{me} = (E_{c,B} + E_{p,B}) - (E_{c,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A}$$

Quindi:

$$W_{me} = E_{m,B} - E_{m,A}$$

Riprendiamo: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$

$$\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

Si dimostra che:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

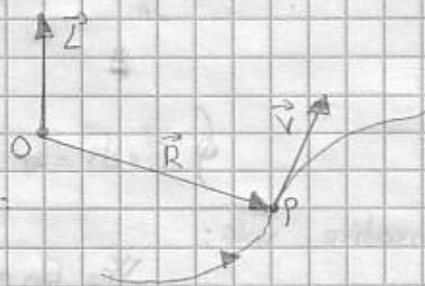
$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\nabla E_p$$

Si definisce momento ANGOLARE la quantità di moto.

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \vec{R} \times m\vec{v}$$



Il punto O viene detto polo. Se il polo varia:

$$\vec{L}'_O = \vec{L}_O + \vec{O'O} \times m\vec{v}$$

In generale si ha: $\vec{L}(t)$

Quindi:

$$NB: \vec{R} \times m\vec{v} = \vec{L}$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v} = \vec{R} \times m(\vec{v}_A + \vec{v}_G) = \vec{R} \times m\vec{v}_G$$

In modulo:

$$L = mRv_G = mR^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Se il moto è circolare si ha:}$$

$$\vec{L} = mR^2 \vec{\omega}$$

Infatti: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Il momento della forza è:
Nel caso che agiscono più forze:

$$\vec{\Pi} = \vec{R} \times \vec{F} \rightarrow \vec{\Pi}'_O = \vec{\Pi}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

Ne caso che il polo cambia nel tempo

$$\vec{R} = \vec{r}_i; \vec{F} = \vec{F}_i \rightarrow \vec{\Pi} = \vec{R} \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{R} \times \vec{F}_n = \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{R} \times \vec{F}$$

Analizziamo ora il momento ANGOLARE nella sua definizione più completa:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{R} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ipotesi che il polo sia fisso. Quindi:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_p$$

Quindi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}_p \times m\vec{v} + \vec{R} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Però: } \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times m\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Quando detto va sotto il nome di TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE. In particolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \vec{L} = \text{cost}$$

Questo accade quando:

$$\vec{R} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{R} \text{ e } \vec{F} \text{ sono paralleli.}$$

$$\text{In particolare: } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \vec{\tau} dt = d\vec{L} \Rightarrow \int_0^t \vec{\tau} dt = \int d\vec{L}$$

$$\text{Posto } \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \int_0^t \vec{\tau} dt = \int d\vec{L}$$

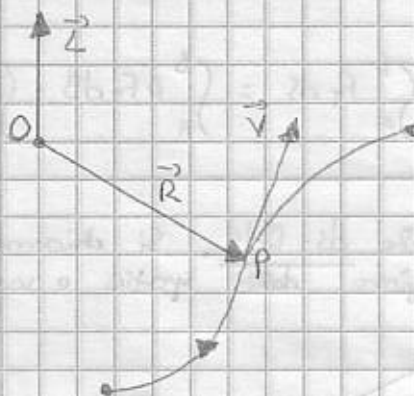
$$\int_0^t \vec{\tau} dt = \Delta\vec{L} = \vec{L}_{fin} - \vec{L}_{in}$$

Se $\vec{F} = \text{cost}$ si ha:

$$\int_0^t (\vec{R} \times \vec{F}) dt = \int d\vec{L} \Rightarrow \vec{R} \times \left(\int_0^t \vec{F} dt \right) = \int d\vec{L}$$

$$\vec{R} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$$

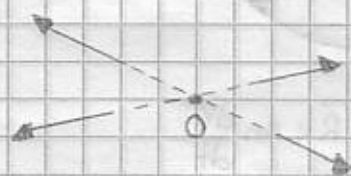
In particolare con riferimento ad un moto circolare si ha:



(22)

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B R F d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} R F d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \tau d\theta$$

Si consideri infatti che $ds = R d\theta$. Si chiamano **FORZE CENTRALI** quelle forze che agiscono in una certa regione dello spazio e sono così strutturate:

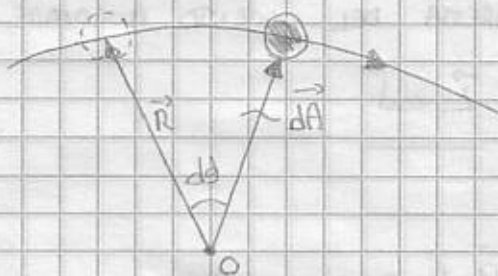


O = centro di forza

In un campo di forze centrali, il momento della forza rispetto al centro è nullo. Quindi:

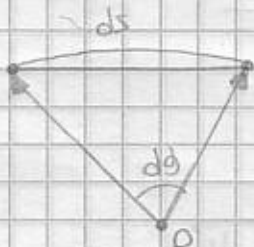
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Consideriamo ora:



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{VELOCITÀ AREA}$$

Infatti:



$$ds = R d\theta$$

$$\text{ma } A = B \cdot h / 2 = R d\theta \cdot R / 2 = \frac{R^2 d\theta}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Quindi la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano passante in modo che:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante.}$$