

Consideriamo un moto RETTILINEO:



Per $t = t_1 \Rightarrow$ la particella occupa la posizione X_1

Quindi:

$$V_{\text{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1} \rightarrow \text{VELOCITA' MEDIA}$$

Per $t = t_2 \Rightarrow$ la particella occupa la posizione X_2 .

Il:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{m}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt} = v \rightarrow \text{VELOCITA' ISTANTANEA.}$$

Se scegliamo l'istante $x(t)$, posso:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v \cdot dt = dx \Rightarrow \int_{t_0}^t v \cdot dt = \int_{x_0}^x dx \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt$$

Se la velocità v è costante $\Rightarrow$ MOTO RETTILINEO UNIFORME.

Quindi:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v \cdot dt$$

Se $t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v \cdot t$. In particolare: $V_{\text{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\int_{t_0}^t v \cdot dt}{\Delta t}$ visto che: $\Delta x = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt$

Analogamente:

$$A_{\text{m}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \rightarrow \text{ACCELERAZIONE MEDIA}$$

Quindi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A_{\text{m}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = a \rightarrow \text{ACCELERAZIONE ISTANTANEA.}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a \cdot dt = dv \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a \cdot dt \Rightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^t a \cdot dt \Rightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^t a \cdot dt \rightarrow \text{MOTO ACCELERATO}$$

Se $a = \text{cost} \Rightarrow$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO $\Rightarrow v = v_0 + a \int_{t_0}^t dt = v_0 + a(t - t_0)$

$$t_0 = 0 \Rightarrow v = v_0 + at$$

Inoltre:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[v(x)]}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow a = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow a dx = v dv \Rightarrow \int_{x_0}^x a dx = \int_{v_0}^v v \cdot dv$$

$$\int_{x_0}^x a dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

Se $a = \text{cost} \Rightarrow a \int_{x_0}^x dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \Rightarrow a(x - x_0) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$

$$a(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Per calcolare la posizione si ha:

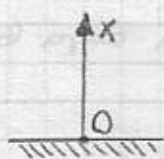
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + at) dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t at dt = \\ &= x_0 + v_0 \int_{t_0}^t dt + a \int_{t_0}^t t dt = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Posto $t_0 = 0$ si ha:

②

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

L'unità di misura della velocità è m/s o della accelerazione è m/s². Consideriamo ora

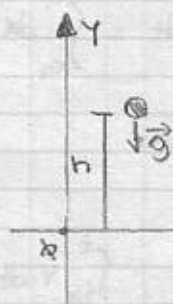


Trascurando l'attrito con l'aria, un corpo lasciato libero di cadere viene attratto dalla superficie terrestre $\Rightarrow$ moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a g .

$g = 9,8 \text{ m/s}^2$ = ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE. Quindi:
In particolare:

$$\begin{cases} v(t) = v_0(t) + gt \\ x(t) = x_0 + v_0(t)t + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

• caduta da un'altezza h :



Il simbolo di g è diretto verso il basso e quindi ha verso opposto al sistema di riferimento.

Perciò: $v(t) = v_0 - gt$ ma $v_0 = 0$

$$v = -gt$$

Analogamente:

$$v(x) = \sqrt{2g(h-x)} \quad \text{Infatti: } \int_x^h a(x) dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$g \int_x^h dx = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow g(h-x) = \frac{1}{2}v^2$$

$$v = \sqrt{2g(h-x)}$$

e: $x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

In particolare: $t(x) = \sqrt{\frac{2h-2x(t)}{g}}$

Il tempo di caduta è: $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ in quanto $x(t) = 0$.

$$v_c = \sqrt{2gh} \quad \text{perché} \quad v_c = -gt_c = -g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

• Punto lanciato verso il basso:

$$x_0 = h, \quad v_0 = -v_i \Rightarrow v(t) = -v_i - gt$$

$$v(x) = \sqrt{v_i^2 + 2g(h-x)} \quad \text{perché: } \int_x^h a(x) dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_i^2 \Rightarrow g(h-x) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_i^2$$



$$2g(h-x) + v_i^2 = v^2$$

$$x(t) = h - v_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t(x) = -\frac{v_i}{g} + \sqrt{\frac{v_i^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}}$$

Quindi:

$$\Delta = b^2 - 4ac = v_i^2 + 2g(h-x(t))$$

$$t_{1,2}(x) = \frac{-v_i \pm \sqrt{v_i^2 + 2g(h-x(t))}}{g}$$

$$x(t) - h = -v_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_i t + \frac{1}{2}gt^2 = h - x(t)$$

$$t(v_i + \frac{1}{2}g) = h - x(t)$$

$$t_c = \frac{-V_1}{g} + \sqrt{\frac{V_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}, \quad V_c = \sqrt{V_1^2 + 2gh}$$

• Lanciamo il punto verso l'alto: $X_0 = 0$ e $V_0 = V_2 > 0$

Esso sale e si ferma in:

$$t_n = \frac{V_2}{g} \text{ e } X_n = \frac{V_2^2}{2g}$$

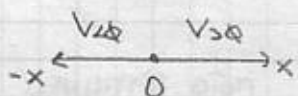
$$\begin{cases} V = V_2 - gt \\ x = V_2 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dopo $t > t_n \Rightarrow$ il punto si comporta come nel 1° caso. In particolare:

$$t(x) = \frac{V_2}{g} \pm \sqrt{\frac{V_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = t_n \pm \sqrt{t_n^2 - \frac{2x}{g}}$$

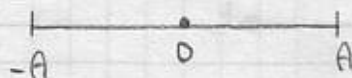
$$v(x) = \pm \sqrt{V_2^2 - 2gx}$$

Si ricordi inoltre che la direzione del moto dipende dal segno degli acceleri:



e per $a > 0 \rightarrow$ ACCELERAZIONE
 $a < 0 \rightarrow$ DECELERAZIONE

Consideriamo:



$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

A = ampiezza

$\omega t + \phi$ = FASE

ϕ = FASE INIZIALE

ω = PULSAZIONE

MOTO ARMONICO

È un moto periodico di periodo $T = 2\pi/\omega$. Infatti:

$$T = t' - t \text{ e } x'(t) = x(t) \Rightarrow \omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi \Rightarrow \omega t' - \omega t = 2\pi$$

Quindi:

$$t' - t = \frac{2\pi}{\omega} = T \text{ e } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega(t' - t) = 2\pi$$

Quando ω è grande il moto si ripete velocemente, mentre quando ω è piccolo il moto si ripete lentamente.

$$f = \frac{1}{T} = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \text{FREQUENZA}$$

Quindi:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione mentre l'accelerazione

assume il valore massimo agli estremi.
Quindi:

$$a = -\omega^2 x$$

In particolare:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \rightarrow \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL MOTO ARMONICO.}$$

Consideriamo:

$$a = -kV \text{ con } k = \text{cost.}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dV}{dt} = -kV \Rightarrow \frac{dV}{V} = -k dt \Rightarrow \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = \int_{t_0}^t -k dt$$

$$\Downarrow$$

$$\log V - \log V_0 = -k \int_{t_0}^t dt$$

$$\text{Per: } \log V - \log V_0 = \log \frac{V}{V_0} \Rightarrow \log \frac{V}{V_0} = -k(t-t_0)$$

$$\text{Posto } t_0 = 0 \Rightarrow \log \frac{V}{V_0} = -kt$$

$$\Downarrow$$

$$V(t) = V_0 e^{-kt}$$

Inoltre:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} V$$

$\Downarrow$

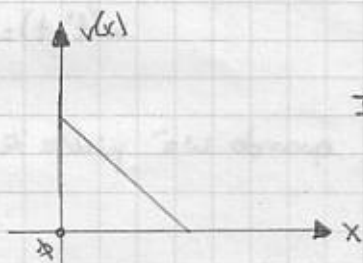
$$-kV = \frac{dV}{dx} V \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -k$$

$\Downarrow$

$$dV = -k dx \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = \int_{x_0}^x -k dx \Rightarrow V - V_0 = -k(x - x_0)$$

Quindi:

$$V = V_0 - k(x - x_0) \Rightarrow \text{Posto } x_0 = 0 \text{ si ottiene: } V = V_0 - kx$$



Il punto si ferma in $x = V_0/k$. Inoltre: $x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt =$

$$= \int_0^t V_0 e^{-kt} dt = -V_0/k [e^{-kt}]_0^t =$$

$$= V_0/k (1 - e^{-kt})$$



Consideriamo ora:



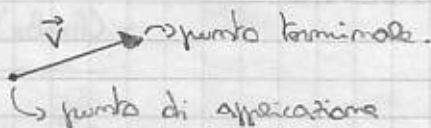
$\vec{R}(t)$ = RAGGIO VETTORE O VETTORE POSIZIONE.

In Fisica esistono due tipi di grandezze:

- 1) SCALARI $\rightarrow$ rappresentabili da un numero $\rightarrow$ Es: MASSA
- 2) VETTORIALI $\rightarrow$ rappresentabili da un vettore

Un VETTORE è un'entità matematica geometrica che possiede tre caratteristiche:

- 1) DIREZIONE
- 2) VERSO
- 3) INTENSITÀ



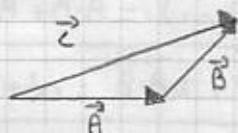
Operazioni:

- $\vec{B} = k \cdot \vec{A}$ con k scalare $\rightarrow$ PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE.

Sia $-\vec{B}$ il VETTORE OPPOSTO di $\vec{B} \Rightarrow \vec{A} = -\vec{B} \Rightarrow k = -1$
 { se $k > 0 \Rightarrow$ il vettore $\vec{B}$ ha stesso verso di $\vec{A}$.
 { se $k < 0 \Rightarrow \vec{B}$ ha verso contrario ad $\vec{A}$.

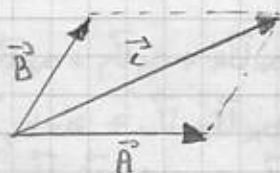
Indichiamo: $\vec{A} = A \vec{U}$ dove $\vec{U} =$ VETTORE = vettore di modulo unitario.

• SOMMA DI VETTORI:



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

METODO PUNTA CODA

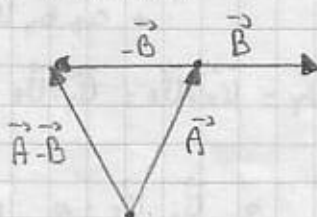


$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

METODO DEL PARALLELOGRAMMA.

Inoltre: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \rightarrow$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



Per estensione:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots$$

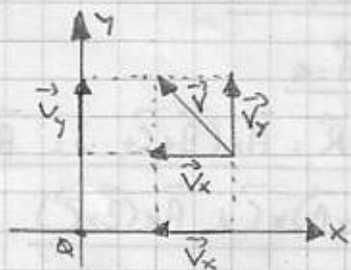
RISULTANTE

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \rightarrow \text{PROPRIETÀ ASSOCIATIVA}$$

In particolare:

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = a_1 \vec{U} + a_2 \vec{U} = (a_1 + a_2) \vec{U} \Rightarrow \sum_i \vec{A}_i = \sum_i (a_i) \vec{U}$$

Un vettore si può scomporre in:



$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = V_x \vec{U}_x + V_y \vec{U}_y$$

dove $\vec{U}_x, \vec{U}_y$ sono i versori dei rispettivi assi

6

Per le tre dimensioni si ha:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

Se si ha: $\begin{cases} \vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \\ \vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{A} + \vec{B} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z + B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z = (A_x + B_x) \vec{u}_x + (A_y + B_y) \vec{u}_y + (A_z + B_z) \vec{u}_z$

• PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI:

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos \theta$$

Proprietà:

• COMMUTATIVA: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Implichi:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a b \cos \theta = b a \cos \theta = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

• $\vec{A} \cdot \vec{A} = a^2$

• PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\vec{A} \cdot \vec{R} = \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C} + \dots) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} + \dots$

• Se $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow c^2 = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = a^2 + b^2 + 2 \vec{A} \cdot \vec{B} = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$

↳ TEOREMA DI CARNOT.

• $\begin{cases} \vec{A} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z \\ \vec{B} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \cdot (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) = a_x b_x \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x + a_x b_y \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y + a_x b_z \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z + a_y b_x \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x + a_y b_y \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y + a_y b_z \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z + a_z b_x \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x + a_z b_y \vec{u}_z \cdot \vec{u}_y + a_z b_z \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

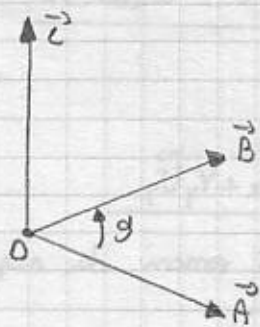
NB: $\begin{cases} \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1 \\ \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = 1 \\ \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1 \end{cases}$ ma $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$

In definitiva: $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$ e $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ se $i \neq j$.

• PRODOTTO VETTORIALE TRA VETTORI:

$$\vec{c} = \vec{A} \times \vec{B}$$

e $c = ab \sin \theta$ in modulo.



NB: $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$

• $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

• $\vec{A} \times \vec{R} = \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C} + \dots) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} + \dots$

• $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

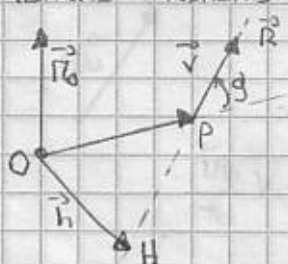
• Sia: $\begin{cases} \vec{A} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z \\ \vec{B} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \times (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) =$

$$a_x b_x \vec{u}_x \times \vec{u}_x + a_x b_y \vec{u}_x \times \vec{u}_y + a_x b_z \vec{u}_x \times \vec{u}_z + a_y b_x \vec{u}_y \times \vec{u}_x + a_y b_y \vec{u}_y \times \vec{u}_y + a_y b_z \vec{u}_y \times \vec{u}_z + a_z b_x \vec{u}_z \times \vec{u}_x + a_z b_y \vec{u}_z \times \vec{u}_y + a_z b_z \vec{u}_z \times \vec{u}_z =$$

$$= a_x b_y \vec{u}_z - a_x b_z \vec{u}_y - a_y b_x \vec{u}_z + a_y b_z \vec{u}_x + a_z b_x \vec{u}_y - a_z b_y \vec{u}_x = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z$$

NB: $\begin{aligned} \vec{u}_i \times \vec{u}_i &= 0 \\ \vec{u}_x \times \vec{u}_y &= \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_z &= \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_x &= \vec{u}_y \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_x &= -\vec{u}_z \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_y &= -\vec{u}_x \\ \vec{u}_x \times \vec{u}_z &= -\vec{u}_y \end{aligned}$

• MOMENTO DI UN VETTORE RISPETTO AD UN PUNTO:



$O = \text{punto}$

$\vec{h} = \text{BRACCIO}$

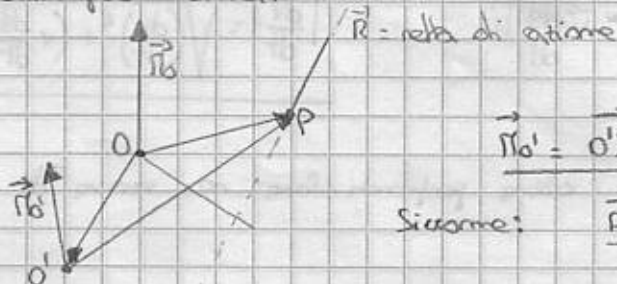
$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{V}$$

Oppure:

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{V} = \vec{OH} \times \vec{V}$$

$$|\vec{M}_O| = |\vec{OP}| \cdot \sin g = |\vec{OH}| \cdot V = hV$$

Se si sceglie un altro polo si ha:



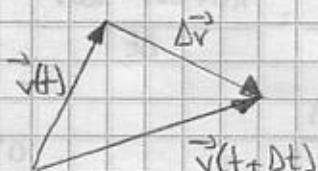
$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'P} \times \vec{V}$$

Siccome: $\vec{OP} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{OP} \times \vec{V} = \vec{OO'} \times \vec{V} + \vec{O'P} \times \vec{V} = \\ &= \vec{OO'} \times \vec{V} + \vec{M}_{O'} \end{aligned}$$

In generale $\vec{M}_O \neq \vec{M}_{O'}$.

Quindi concludendo, il momento di un vettore dipendente dal polo. Consideriamo ora:



$$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$$

In particolare: $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$

NB: $\Delta \vec{v} = \text{VETTORE SPOSTAMENTO}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Le regole di derivazione sono le stesse. In particolare:

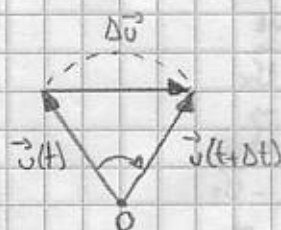
↓ DERIVATA DI UN VETTORE.

⑧

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$

Per quanto riguarda un vettore si ha:

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$$

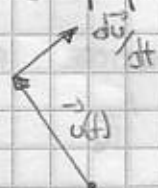


$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Per: $du = |u(t)| d\theta = d\theta \Rightarrow \underline{d\vec{u} = d\theta \vec{u}_n}$

con $\vec{u}_n$ = vettore perpendicolare a $\vec{u}(t)$.

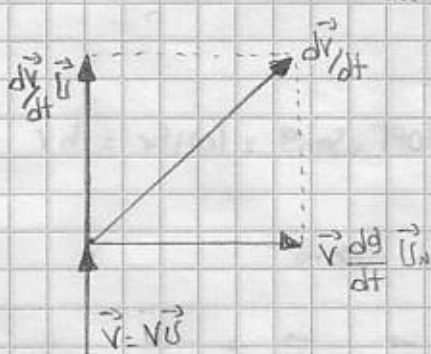
Quindi: $\underline{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_n}$



Scriviamo ora un generico vettore $\vec{v}$ nel modo:

$$\underline{\vec{v} = v \vec{u}} \Rightarrow \underline{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + v \frac{d\vec{u}}{dt}}$$

Graficamente:

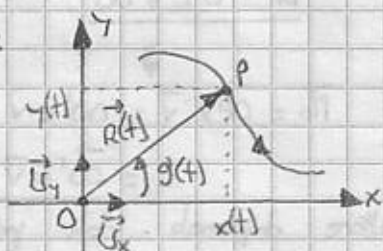


Quindi: $\underline{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + v \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_n}$

$$\underline{\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(v \frac{d\theta}{dt} \right)^2}}$$

La derivata di un vettore è un vettore perpendicolare al vettore di modulo $\frac{d\theta}{dt} \neq 1$.

Torniamo a noi:



$$\underline{\vec{R}(t) = \vec{OP} = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y}$$

Definiamo la velocità VETTORIALE:

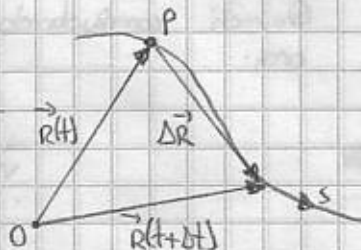
$$\underline{\vec{V}_{\text{m}} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}}$$

$$\underline{\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}}$$

→ VELOCITÀ VETTORIALE ISTANTANEA.

Sia $\vec{u}_T$ il vettore TANGENTE ALLA TRAIETTORIA, si ha:

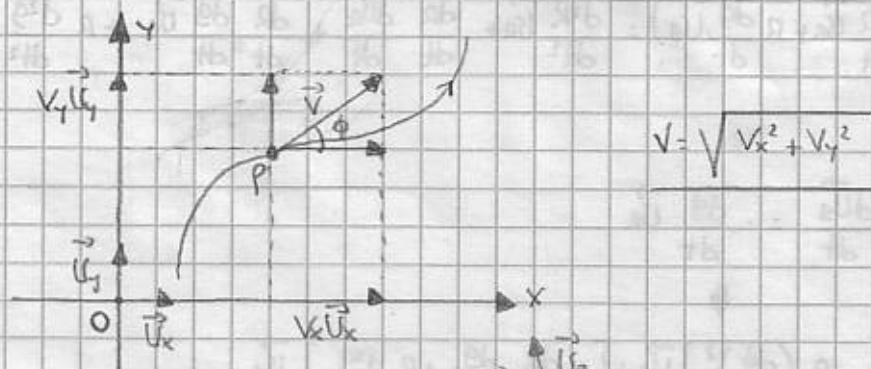
$$\underline{d\vec{R} = ds \vec{u}_T}$$



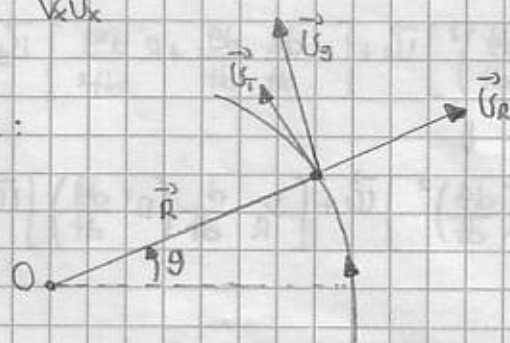
In coordinate cartesiane si ha:

$$\underline{\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T}$$

$$\vec{R} = x\vec{U}_x + y\vec{U}_y \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{U}_x + \frac{dy}{dt}\vec{U}_y = v_x\vec{U}_x + v_y\vec{U}_y$$



In coordinate polari:



$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dR}{dt}\vec{U}_R + R \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$$

$$\vec{V} = \frac{dR}{dt}\vec{U}_R + R \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta = \vec{V}_R + \vec{V}_\theta$$

$\vec{V}_R$ = VELOCITA' RADIALE
 $\vec{V}_\theta$ = VELOCITA' TRASVERSA

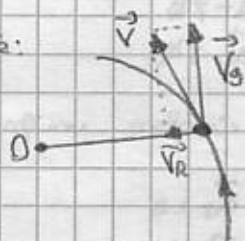
In particolare: $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$. Siccome: $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}(t)$

Quindi:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{V}(t) dt$$

$$\vec{V}(t) dt = d\vec{R} \Rightarrow \int_{t_0}^t \vec{V}(t) dt = \int_{R_0}^R d\vec{R}$$

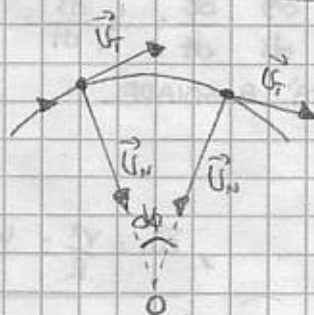
Analizziamo:



$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{U}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{U}_T + v \frac{d\vec{U}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{U}_T + v \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_n$$

Ponendo: $ds = R d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{U}_T + \frac{v^2}{R}\vec{U}_n = \vec{a}_T + \vec{a}_n$$



$\vec{a}_T$ = ACCELERAZIONE TANGENZIALE

$\vec{a}_n$ = ACCELERAZIONE NORMALE

Siccome: $a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

In componenti cartesiane:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{U}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{U}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{U}_z = a_x\vec{U}_x + a_y\vec{U}_y + a_z\vec{U}_z$$

16)

Im coordinate polari:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

Posto: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ e $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta$$

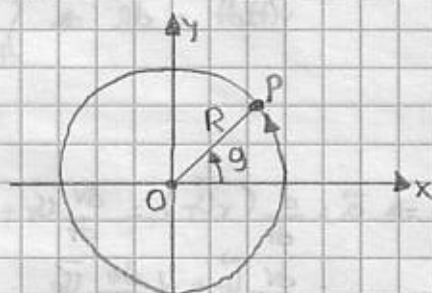
$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{u}_\theta$$

De terminare:

$$\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r = \text{ACCELERAZIONE RADIALE}$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{u}_\theta = \text{ACCELERAZIONE TRASVERSA}$$

Consideriamo ora:



Se il moto è circolare non uniforme:

$$\begin{cases} \vec{a}_r \neq 0 \\ \vec{a}_\theta \neq 0 \end{cases}$$

Se il moto è circolare uniforme:

$$\begin{cases} \vec{a}_r = a \\ \vec{a}_\theta = 0 \end{cases}$$

Posto: $R d\theta = ds \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v = \frac{v}{R}$

↓ VELOCITÀ ANGOLARE.

Quindi:

$$v = \omega R$$

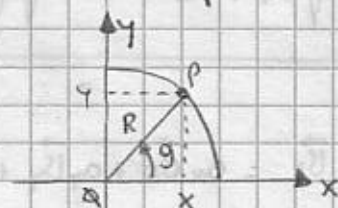
leggi orarie:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + vt \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega t \end{cases}$$

$$\vec{a}_r = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Il moto circolare è un moto periodico di periodo $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Simili a:



$$\begin{cases} x = R \cos \theta = R \cos(\omega t + \theta_0) \\ y = R \sin \theta = R \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

Definiamo:

$$d = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2g}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R} \rightarrow \text{ACCELERAZIONE ANGOLARE.}$$

Analogoamente:

$$d = \frac{dw}{dt} \Rightarrow d dt = dw \Rightarrow \int_{w_0}^w dw = \int_{t_0}^t d dt \Rightarrow w = w_0 + \int_{t_0}^t d dt$$

$$w = \frac{dg}{dt} \Rightarrow w dt = dg \Rightarrow \int_{g_0}^g dg = \int_{t_0}^t w dt \Rightarrow g(t) = g_0 + \int_{t_0}^t w dt$$

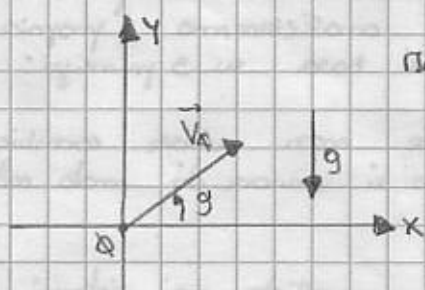
Oppure: $d = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{dw}{dg} \cdot w \Rightarrow d dg = w dw \Rightarrow \int_{g_0}^g d dg = \int_{w_0}^w w dw$

Chiaro che se $d = \cos t$, si ha:

$$\begin{cases} w = w_0 + dt \\ g = g_0 + w_0 t + \frac{1}{2} d t^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} w_0^2 = \int_{g_0}^g d dg$$

Consideriamo infine la seguente situazione:



NON PARABOLICO.

$$\vec{v}(t) = \vec{V}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt = \vec{V}_0 - gt \vec{U}_y$$

Scomponendo:

$$\begin{cases} x: & x = V_0 \cos \theta t \\ y: & y = V_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Quindi:

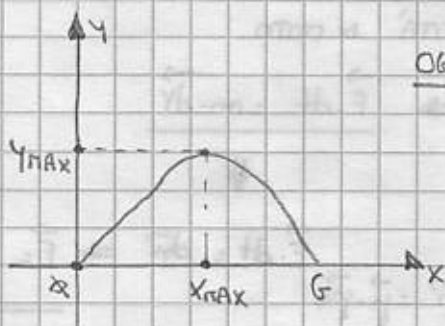
$$x / V_0 \cos \theta = t \Rightarrow y(x) = V_0 \sin \theta \frac{x}{V_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta} \right) \leftarrow \text{EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA.}$$

Perciò:

$$y(x) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \theta}$$

che è l'equazione di una parabola.

Per calcolare la gittata si ha:



OG = GITTATA

$$y(x) = 0 \Rightarrow \text{Tg} \theta x - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} = 0$$

$$\downarrow \\ \text{Tg} \theta x = \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \theta}$$

Quindi:

$$2 V_0^2 \cos^2 \theta \text{Tg} \theta = g x \Rightarrow x_0 = \frac{2 V_0^2 \cos^2 \theta \text{Tg} \theta}{g} = 2 x_{\text{max}}$$

Quindi:

$$x_{\text{max}} = x_{\text{max}} = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta \text{Tg} \theta}{g}$$