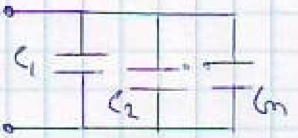
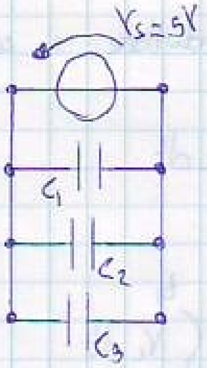
Dualmente se si hanno 'm' condensatori in parallelo si ha:



$$C_S = C_1 + C_2 + \dots + C_m = \sum_{i=1}^{m} C_i$$

Per esempio:



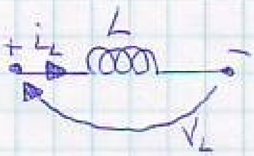
$C_1 = 22\,mF$
$C_2 = 0,1\,\mu F$
$C_3 = 140\,mF$

Calcolare la capacità totale e l'energia immagazzinata.

Si ha:

$$\begin{cases} C_T = C_1 + C_2 + C_3 = 162\,mF \\ E_C = \frac{1}{2} C_T V^2 = \frac{1}{2}\, 162\,mF \cdot 5V^2 = 275\,mJ \end{cases}$$

Analogamente si definiscono gli induttori. Il simbolo circuitale di un induttore è il seguente:



Anch'esso è un bipolo utilizzatore caratterizzato dall'induttanza L. Tale induttanza si misura in Henry (H). Gli induttori impiegati in elettronica hanno delle induttanze che vanno da millihenry (mH) ai microhenry (μH). Quando un conduttore, una spira, o un solenoide o un circuito elettrico è percorso da corrente si crea un flusso magnetico ad esso concatenato. Nel caso in cui varia la corrente nel circuito, varia anche il flusso e pertanto, per la legge di Faraday:

$$f.e.m\ indotta = -\frac{d\phi}{dt}$$

il circuito stesso è sede di una f.e.m indotta che crea una corrente indotta. Il flusso concatenato è proporzionale alla corrente che lo produce, e tale costante di proporzionalità è proprio L. Quindi:

$$\phi_c = L \cdot i$$

dove ϕ_c è il flusso concatenato. Quindi: $f.e.m\ indotta = -\frac{d\phi_c}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

Il fenomeno appena descritto chiamato fenomeno di autoinduzione interviene ad ostacolare le variazioni di corrente e quindi l'induttanza caratterizza l'inerzia del circuito. Ecco quindi che l'induttore viene utilizzato là dove non si vogliono sbalzi di corrente improvvisi. Quindi l'induttore obbedisce alla seguente relazione:

$$V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Si può facilmente notare che in regime stazionario l'induttore si comporta come un cortocircuito. Posto:

$$t_0 = 0 \text{ e } t_1 \neq 0 \Rightarrow V_L dt = L di \Rightarrow \int di = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{L} V_L dt$$

$$\Downarrow$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_1} V_L dt$$

La corrente che attraversa un induttore non può variare istantaneamente. Siccome:

$$\phi_c = L\cdot i \Rightarrow L = \frac{\phi_c}{i} \Rightarrow L = \frac{N\phi_c}{i} = \frac{NB\cdot S}{i}$$

Infatti: $\phi_c = B\cdot S$. Pertanto: $L = \frac{N}{i}\cdot\mu\frac{Ni}{i}S = \mu N^2\frac{S}{i}$

dove S è l'area della sezione trasversale del solenoide. Siccome, per definizione, l'energia cinetica di un corpo in movimento è:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

allora l'energia che si accumula nel campo magnetico dovuto alla corrente è:

$$E_L = \frac{1}{2}L\cdot i^2$$

Infatti:

$$P = \frac{dL}{dt} \Rightarrow Pdt = dL \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} P\cdot dt = \int dL \Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_1} Pdt = \int_{t_0}^{t_1} v\cdot i\, dt$$

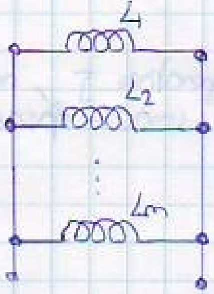
Ma:

$$v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} L\frac{di}{dt}\cdot i\, dt = \int_{t_0}^{t} L i\, di = \frac{1}{2}Li^2$$

Dualmente si ha che se ho 'n' induttori in serie ottengo la seguente situazione:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

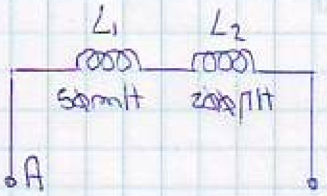
Nel caso invece di 'n' induttori in parallelo si ha:



$$L_{TOT} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \dots + 1/L_n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/L_i}$$

Per esempio:

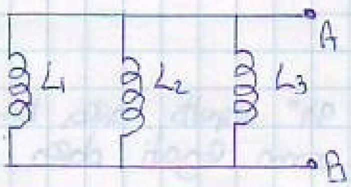
1)



Calcolare l'induttanza equivalente.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 = 50\,mH + 200\,\mu H = 50{,}2\,mH$$

2)



$L_1 = 50\,mH$
$L_2 = 100\,mH$
$L_3 = 100\,mH$

Calcolare L_{eq}.

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + 1/L_3} = \frac{1}{1/100 + 1/100 + 1/50} = 25\,mH$$

Rianalizziamo ora il condensatore e l'induttore con il metodo simbolico (fasoriale). Consideriamo per primo il condensatore:

$$v_c = \overline{V}_c \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = \omega C \overline{V}_c \cos(\omega t) = \omega C \overline{V}_c \,\mathrm{sen}(\omega t + \pi/2)$$

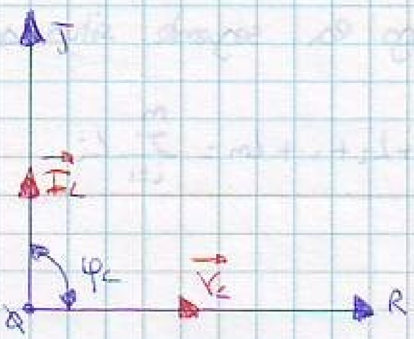
$$\Downarrow$$

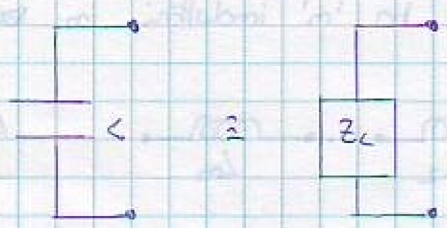
$$i_c = I_c \,\mathrm{sen}(\omega t + \pi/2)$$

dove:

$$I_c = \omega C \overline{V}_c$$

Quindi in questo caso la corrente è una sinusoide con ampiezza I_c e sfasata in anticipo di 90° rispetto alla tensione. Graficamente si ha:





Qui Z_C prende il nome di impedenza capacitiva. Siccome l'operatore J, nella notazione fasoriale, implica una derivazione nel tempo e introduce uno sfasamento di 90° tra corrente e tensione, si ha:

$$\vec{I}_C = J\omega C\vec{V}_C \Rightarrow \vec{Z} = \frac{\vec{V}_C}{\vec{I}_C} = \frac{1}{J\omega C} = -\frac{J}{\omega C}$$

Quindi l'impedenza di un condensatore è un numero immaginario. Il modulo di tale impedenza vale $1/\omega C$ e viene chiamato reattanza capacitiva.

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

La reattanza capacitiva si misura in ohm. La fase di tale impedenza vale -90°.

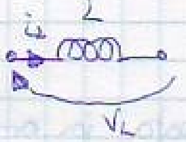
$$\varphi_C = -90° \Rightarrow \vec{V}_C = -JX_C\vec{I}_C$$

Concludendo, il condensatore sfasa la corrente in anticipo di 90° rispetto alla tensione ai propri morsetti. I moduli della tensione e della corrente sono legati dalla seguente relazione:

$$V_C = X_C I_C$$

Ricordandosi che: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \Rightarrow X_C = \frac{1}{2\pi f C}$

Quindi per $f=0$ si ha che $X_C = \infty$ e il condensatore si comporta come un circuito aperto, mentre se $f=\infty$ si ha che $X_C = 0$ e il condensatore equivale ad un cortocircuito.
Analizziamo ora l'induttore:

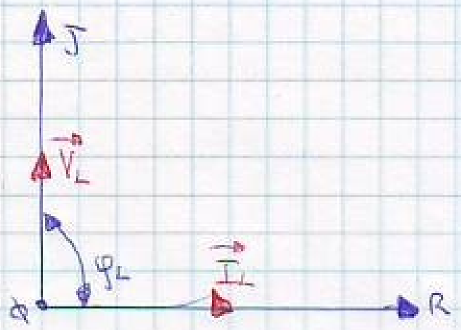


$$i_L = I_L \,\mathrm{sen}(\omega t) \Rightarrow v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\omega I_L \cos(\omega t) = \omega L I_L \,\mathrm{sen}(\omega t + \pi/2)$$

Quindi:

$$v_L = \bar{V}_L \,\mathrm{sen}(\omega t + \pi/2) \quad \text{dove:} \quad \bar{V}_L = \omega L I_L$$

Tale tensione è una sinusoide con ampiezza $V_L = \omega L I_L$ sfasata di 90° rispetto alla corrente.



Quindi si può scrivere vettorialmente:

$$\vec{V}_L = j\omega L \vec{I}_L$$

Pertanto:

$$\vec{Z}_L = \frac{\vec{V}_L}{\vec{I}_L} = j\omega L \quad \text{(impedenza induttiva).}$$

Pertanto l'impedenza di un induttore è un numero immaginario. Il modulo di tale impedenza vale ωL e viene chiamato reattanza induttiva. Quindi:

$$X_L = \omega L$$

La fase è: $\varphi_L = +90° \Rightarrow \vec{V}_L = j X_L \vec{I}_L$

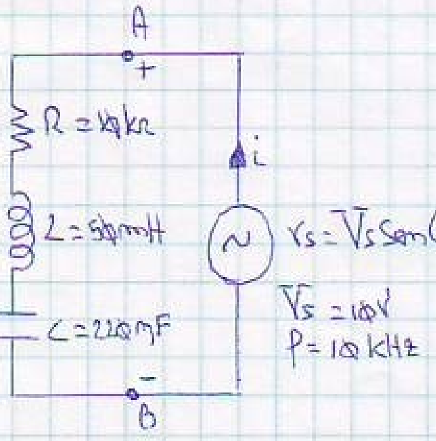
In conclusione, l'induttore sfasa la corrente che lo attraversa di 90° in ritardo rispetto alla tensione indotta ai morsetti. I moduli della tensione e della corrente sono legati dalla seguente equazione:

$$V_L = X_L I_L$$

Siccome: $\omega = 2\pi f \Rightarrow X_L = 2\pi f L$

Pertanto per $f = 0$, $X_L = 0$ e quindi l'induttore si comporta come un cortocircuito, mentre per $f \to \infty$, $X_L \to \infty$ e quindi l'induttore si avvicina al comportamento di un circuito aperto. Vediamo un esempio:

1) Calcolare l'impedenza e la corrente assorbita dal seguente circuito:



Determinare inoltre lo sfasamento tra la tensione e la corrente che fluisce nel circuito.

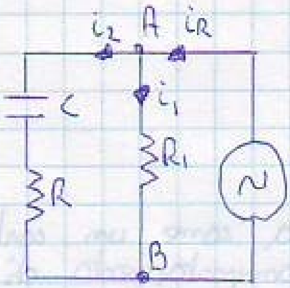
1)

ESERCIZIO

DA

SVOLGERE

2) Risolvere il seguente circuito:



$v_S = \overline{V}_S \,\mathrm{sen}(\omega t)$

$\overline{V}_S = 10V$, $f = 2kHz$

DATI: $R_1 = 1{,}8\,k\Omega$
$R = 4{,}7\,k\Omega$
$C = 22\,nF$

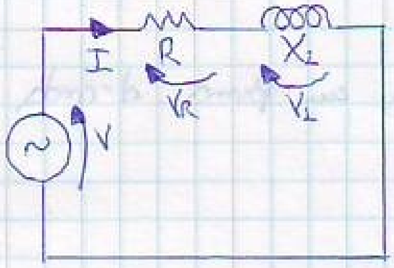
2)

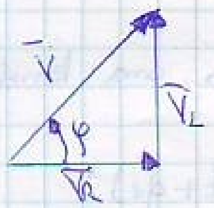
ESERCIZIO

DA

SVOLGERE.

Fino ad ora, in regime sinusoidale si sono visti circuiti puri, ossia circuiti contenenti un solo tipo di componente. Nei circuiti reali, possono comparire contemporaneamente più tipi diversi di componenti. Abbiamo visto che l'impedenza è sostanzialmente un numero complesso che esprime un legame tra la tensione e la corrente, e non è funzione del tempo. Essa esprime l'ostacolo al passaggio della corrente e, a differenza della resistenza, essa tiene conto anche della reattanza induttiva e capacitiva. Consideriamo ora il seguente circuito:





Sappiamo che:

$$\vec{V} = \vec{V}_L + \vec{V}_R = R \cdot \bar{I} + jX_L \bar{I} = \bar{z} \cdot \bar{I}$$

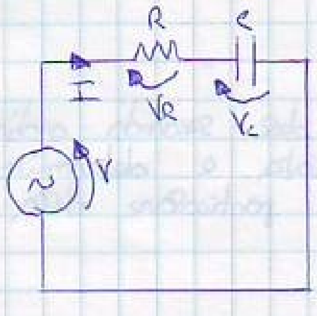
In modulo si ha:

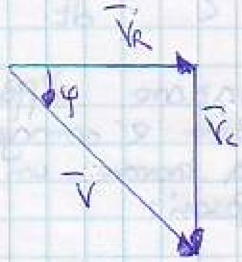
$$|\vec{V}| = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2} = I \cdot Z$$

La fase φ è data da:

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi p L}{R} \; ; \quad \begin{cases} \operatorname{Sen} \varphi = \dfrac{X_L}{Z} \\ \operatorname{Cos} \varphi = \dfrac{R}{Z} \end{cases}$$

Il precedente circuito viene detto circuito ohm-induttivo R-L. Consideriamo ora il seguente circuito:





Posto:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi p C} \Rightarrow \bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_C = R \cdot \bar{I} - jX_C \cdot \bar{I} = (R - jX_C) \cdot \bar{I} = \bar{z} \cdot \bar{I}$$

Quindi:

$$\bar{z} = R - jX_C$$

$$|\bar{V}| = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2} = I \cdot Z$$

NB: $\bar{I}, \bar{V}$ sono

La fase è:

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{V_C}{V_R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{2\pi p C R} \; ; \quad \begin{cases} \operatorname{Sen} \varphi = X_C / Z \\ \operatorname{Cos} \varphi = R / Z \end{cases}$$