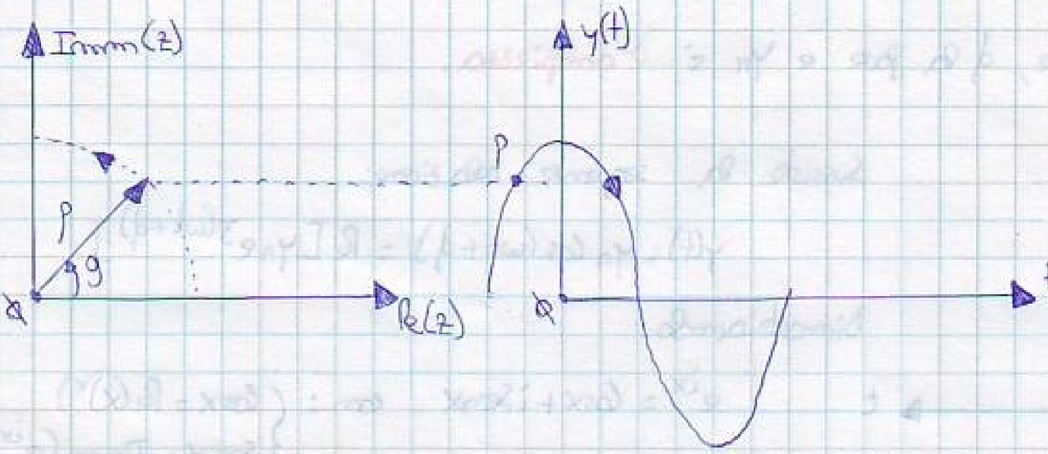
Molti definiscono il fasore come quel vettore, sul piano complesso, che genera la sinusoide. In pratica questo fasore contiene in sé l'ampiezza della funzione $y(t)$, e la fase iniziale φ di $y(t)$. Quindi il fasore è quel numero complesso avente per modulo il valore efficace di $y(t)$ e per argomento la fase di $y(t)$.



Il fasore, ruotando con una certa velocità angolare ω, fa muovere la particella P lungo la curva di equazione $y = y(t)$. Sia:

$$y(t) = y_n \cos(\omega t + \varphi) = Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\omega t}]$$

Ricordandoci che: $\begin{cases} \vec{Y} = Y e^{i\varphi} \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}} y_n \end{cases}$ $\Rightarrow$ 1) l'operatore $Re(z)$ è lineare e quindi:

$$\underline{Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)}$$

Dimostriamo questa proprietà:

$$Re(z_1 + z_2) = Re((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) = Re((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

2) L'operatore $Re(z)$ è commutativo rispetto all'operazione di derivazione nel tempo, ossia:

$$\underline{\frac{d}{dt}\left(Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\varphi}]\right) = Re\left(\frac{d}{dt}[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\varphi}]\right)}$$

Dimostrazione:

se $y(t) = Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\omega t}]$ $\Rightarrow$ $y'(t) = \frac{d}{dt}\left(Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\omega t}\right)$

Possiamo però rappresentare $y(t)$ anche in questo modo:

$$y(t) = y_n \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow y'(t) = -\omega y_n \operatorname{Sen}(\omega t + \varphi) = -\omega y_n \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

Pertanto:

$$y'(t) = Re[\sqrt{2}\,\omega \vec{Y} e^{i(\omega t + \varphi + \pi/2)}] = Re[\sqrt{2}\,\omega \vec{Y} e^{(\omega t)} e^{i\pi/2} e^{i\varphi}]$$

Posto: $e^{i\pi/2} = i$ abbiamo:

$$y'(t) = Re[\sqrt{2}\omega\vec{Y} i e^{\omega t} e^{\phi i}] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}(i\omega)e^{\omega t}e^{i\phi}] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}\frac{d}{dt}(e^{\omega t})e^{i\phi}]$$

I termini che compaiono dentro la parentesi quadra sono tutti costanti nel tempo, eccetto ciò che viene derivato. Quindi:

$$y'(t) = Re[\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\vec{Y}e^{\omega t}e^{i\phi})]$$

Siccome: $\vec{Y} = Ye^{i\phi} \Rightarrow y'(t) = Re[\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\vec{Y}e^{\omega t})] = \frac{d}{dt}(Re[\sqrt{2}\vec{Y}e^{i\omega t})$

Quindi dalla proprietà precedente si deduce che il fasore associato a $y'(t)$ è:

$$\underline{\vec{Y}' = i\omega\vec{Y}}$$

D'ora in poi useremo J al posto di i per seguire le stesse notazioni dei testi. Quindi scriveremo:

$$\vec{Y}' = J\omega\vec{Y}$$

Esiste una regola ricorsiva la quale afferma che:

$$\underline{\vec{Y}^{(n)} = (J\omega)^n\vec{Y}}$$

Quest'ultima espressione va sotto il nome di teorema delle derivate di $y(t)$. In pratica la derivazione nel dominio del tempo (d/dt) corrisponde ad una moltiplicazione per $J\omega$ nel dominio dei fasori. In particolare:

$$\underline{(d^n/dt^n) = (J\omega)^n}$$

Date due funzioni sinusoidali isofrequenziali ossia alla stessa frequenza, esse sono uguali se e solo se sono uguali i fasori che li rappresentano. Quanto appena detto va sotto il nome di lemma di unicità. Dimostriamolo: iniziamo a dimostrare che l'uguaglianza tra due fasori implica l'uguaglianza tra due funzioni sinusoidali.

$$y_1(t) = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_1 e^{i\omega t}] \quad e \quad y_2(t) = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_2 e^{J\omega t}]$$

È evidente che se $\vec{Y}_1 = \vec{Y}_2 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$. Analizziamo l'implicazione inversa.

$$Re[\sqrt{2}\vec{Y}_1 e^{J\omega t}] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_2 e^{J\omega t}] \quad \text{e questa relazione vale } \forall t.$$

Se $t=0$ si ha:

$$Re[\sqrt{2}\vec{Y}_1] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_2]$$

Siccome l'operatore $Re(\cdot)$ è lineare si ha:

$$Re[\vec{Y}_1] = Re[\vec{Y}_2]$$, ossia i due numeri complessi hanno la stessa parte reale.

Ora dobbiamo dimostrare che anche la parte immaginaria è uguale. Si ha:

$$Re[\sqrt{2}\vec{Y}_1 e^{j\omega t}] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_2 e^{j\omega t}]$$

Poniamo: $t = \pi/2\omega \Rightarrow Re[\sqrt{2}\vec{Y}_1 e^{j\pi/2}] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_2 e^{j\pi/2}]$

Dato:

$$e^{j\pi/2} = j \Rightarrow Re[\sqrt{2}\vec{Y}_1 j] = Re[\sqrt{2}\vec{Y}_2 j] \Rightarrow Re[\vec{Y}_1 j] = Re[\vec{Y}_2 j]$$

Ricordandoci che: $jz = j(x+jy) = jx - y \Rightarrow Re(jz) = -y = -Imm(z)$

$$\Downarrow$$

$$-Imm[\vec{Y}_1] = -Imm[\vec{Y}_2]$$

Se si sommano più funzioni sinusoidali isofrequenziali e le loro derivate, il risultato è una funzione ancora sinusoidale e ancora con la stessa frequenza. Quanto detto va sotto il nome di teorema principale sui fasori. Consideriamo a titolo di esempio tre diverse sinusoidi:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \alpha_1) = Re[\sqrt{2}\vec{Y} e^{j\omega t}]$$

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \alpha_2) = Re[\sqrt{2}\vec{X} e^{j\omega t}]$$

$$z(t) = Z_M \cos(\omega t + \alpha_3) = Re[\sqrt{2}\vec{Z} e^{j\omega t}]$$

Sommiamo le prime due con la derivata della terza e otteniamo:

$$s(t) = x(t) + y(t) + z'(t) = Re[\sqrt{2}\vec{X}e^{j\omega t}] + Re[\sqrt{2}\vec{Y}e^{j\omega t}] + Re[\sqrt{2}\vec{Z}(j\omega)e^{j\omega t}] =$$
$$= Re[\sqrt{2}(\vec{X} + \vec{Y} + (j\omega)\vec{Z})e^{j\omega t}]$$

Quindi:

$$\vec{S} = \vec{X} + \vec{Y} + (j\omega)\vec{Z}$$

Detto ciò iniziamo ad analizzare il regime sinusoidale utilizzando il metodo simbolico ossia usando i fasori. Innanzitutto nel regime sinusoidale tutte le grandezze elettriche (tensione, corrente) sono delle sinusoidi isofrequenziali. Il vantaggio fondamentale di utilizzare i fasori sta nel fatto che ci si trova a risolvere delle equazioni algebriche e non delle equazioni differenziali. A grandi linee il metodo simbolico è composto dai seguenti passi:

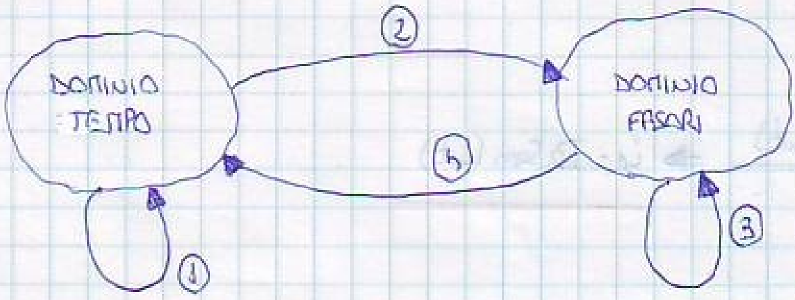
1) si ricavano le leggi fondamentali (legge di ohm, di kirchhoff, ..).

2) Tali relazioni vanno poste sotto forma di fasori.

3) Si risolve il sistema di equazioni algebriche ottenuto al passo precedente

4) Si antitrasformano le soluzioni algebriche in soluzioni nel campo delle grandezze sinusoidali.

Graficamente si ha:

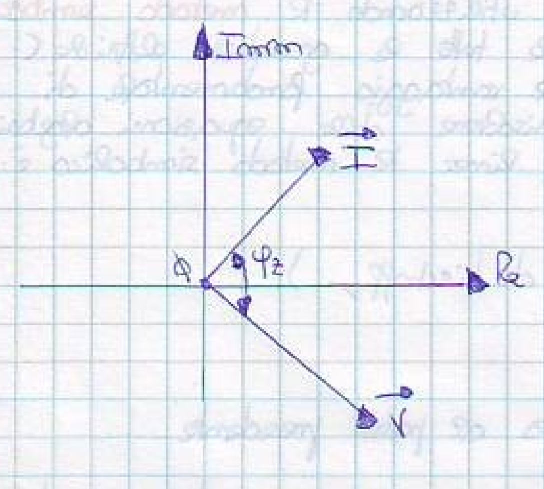


Si noti che i principi di kirchhoff continuano ancora a valere per quei segnali a bassissima frequenza (tendente a zero). Si ricordi inoltre che nel dominio dei fasori le grandezze elettriche sono dei fasori. Consideriamo il bipolo elettrico più semplice, e seguiamo l'approccio riduzionista:

Nel regime sinusoidale la resistenza R viene sostituita dall'impedenza $\vec{Z}$. L'impedenza di un bipolo è definita come il rapporto tra la tensione ai capi del bipolo e la corrente che lo attraversa. Formalmente si scrive:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$

Poiché l'impedenza è un vettore si deduce che essa risulta completamente definita dal suo modulo e dalla sua fase. Indichiamo con φ_Z la fase dell'impedenza.



Riconsideriamo ora il caso della resistenza R. La relazione tra tensione-corrente di un resistore è definita dalla legge di ohm. Supponiamo che sul resistore cada la seguente tensione sinusoidale:

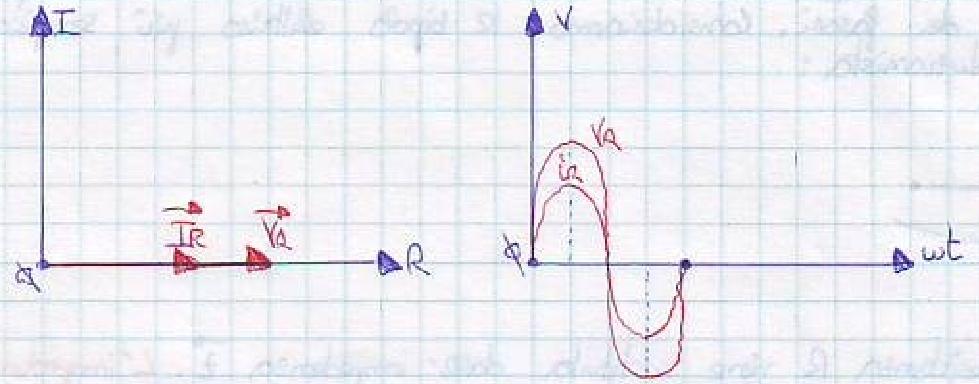
$$v_R = V_R \, Sen(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

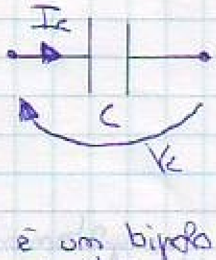
$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R \, Sen(\omega t)}{R} \Rightarrow i_R = I_R \, Sen(\omega t)$$

dove: $I_R = \frac{V_R}{R}$.

Si noti che non esiste alcun spostamento tra la tensione e la corrente. Quindi: $\varphi_R = 0$.

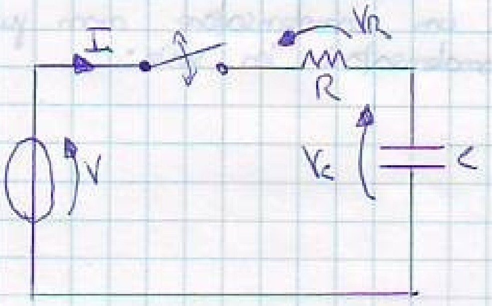


Analizziamo ora due componenti fondamentali in elettrotecnica ed elettronica. Iniziamo a parlare del condensatore. Il simbolo circuitale del condensatore è il seguente:



Come si può notare è un bipolo passivo (utilizzatore) caratterizzato dalla capacità che si indica con C. Tale capacità si misura in farad (F). I condensatori impiegati nell'elettronica hanno capacità che vanno dai microfarad (μF) ai picofarad (pF).

Il condensatore viene utilizzato nella progettazione e realizzazione di memorie. Infatti il condensatore mantiene l'informazione memorizzata sotto forma di carica elettrica. Quando si applica una tensione ai capi di un condensatore scarico si genera un movimento di elettroni dall'armatura con potenziale positivo verso l'armatura con potenziale negativo. Il processo continua fino a quando la d.d.p ai capi del condensatore è uguale alla tensione (f.e.m) del generatore. Si guardi il seguente circuito:

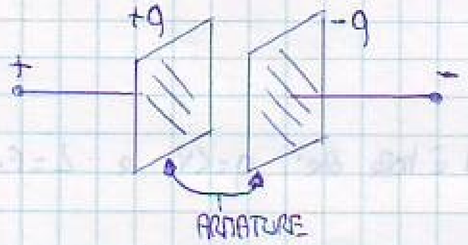


CIRCUITO DI CARICA DI UN CONDENSATORE

Quando l'interruttore si abbassa, circola corrente nel circuito e si inizia la fase di carica del condensatore e tale fase continua fino a quando:

$$V - V_R - V_C = 0 \Rightarrow V = V_R + V_C$$

Tale condensatore viene anche detto piatto (piano) in quanto le armature sono piane.



Tra le armature è presente un dielettrico.

Siccome: $C = \frac{q}{V} \Rightarrow V \cdot C = q \Rightarrow$ se $i = \frac{dq}{dt}$ allora $(V \cdot C)dt = dq \Rightarrow i\,dt = C\,dV$

$$\Downarrow$$

$$i = C\frac{dV}{dt}$$

Quindi la corrente ai capi del condensatore è prodotta da una variazione della tensione ai capi dello stesso. Quindi se:

$$dV = 0 \Rightarrow i = 0$$

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto. Si noti che:

$C = \frac{q}{V}$ è una formula fondamentale della fisica.

Siccome: $i = C\frac{dV}{dt}$ ne consegue che:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{C} \Rightarrow dV = \frac{i}{C}\,dt$$

Posto:

$$t_0 = 0 \text{ e } t_1 \neq 0 \Rightarrow \int dV = \int_{t_0}^{t_1} \frac{i}{C}\,dt \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_1} i\,dt$$

Pertanto se ne deduce che la corrente ai capi di un condensatore non può variare istantaneamente. Analizziamo ora il caso di "n" condensatori in serie:

La capacità totale è:

$$C_S = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots + 1/C_n}$$

Quindi:

$$C_S = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/C_i}$$

Siccome:

$dL = V\,dq$ in quanto la d.d.p. tra le armature V ed è tale che: $q = CV$ e $L = F \cdot S$

Si ha:

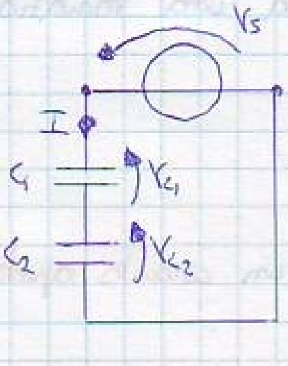
$dL = V\,dq$ è il lavoro per spostare la carica dq attraverso la d.d.p. Quindi:

$$dL = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq \Rightarrow L = \int dL = \int \frac{q}{C}\,dq$$

$$\Downarrow$$

$$L = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

Per esempio:



$$C_S = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}$$

Questa particolare struttura circuitale prende il nome di partitore capacitivo.