

REGIME SINUSOIDALE

Fino ad ora abbiamo considerato grandezze elettriche costanti nel tempo. Nel regime sinusoidale le grandezze elettriche sono delle sinusoidi. Prima di parlare di regime sinusoidale forniamo alcune definizioni. Sia $y(t)$ una generica funzione del tempo. Una funzione non costante nel tempo può essere di due tipi:

- 1) periodica
- 2) non periodica (aperiodica)

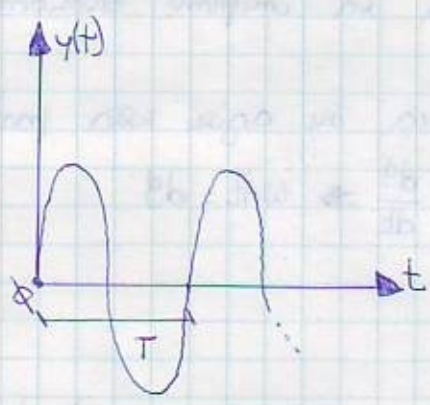
Una funzione $y(t)$ si dice periodica di periodo T se soddisfa la seguente condizione:

$$p(t) = p(t + mT) \quad \forall t > 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

Si noti che $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali. In sostanza, una funzione periodica si ripete nella stessa maniera ogni intervallo di tempo T . T prende il nome di periodo. Si noti che:

$T > 0$

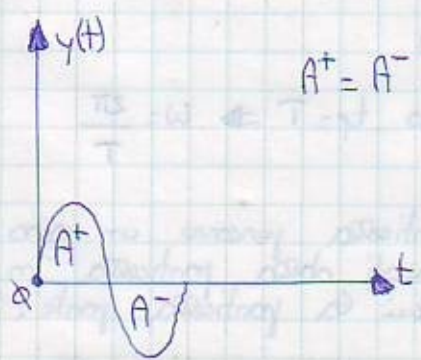
Un esempio di funzione periodica è la seguente:



Dato una generica funzione periodica $y(t)$ di periodo T , si definisce **valore medio** di $y(t)$ il seguente numero:

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt \quad \text{dove } t_0 > 0.$$

Quindi il **valore medio** è quel numero che moltiplicato per T fornisce l'area della funzione nell'intervallo di tempo T . Si definisce **grandezza alternata** una funzione periodica avente **valore medio nullo**.



$A^+ = A^- \Rightarrow \bar{y} = 0$. Non necessariamente una funzione periodica è una grandezza alternata. Basta ciò accada e necessario che essa sia periodica con **valore medio nullo**.

Le funzioni sinusoidali appartengono alla classe delle grandezze alternate. In generale una funzione sinusoidale si scrive così:

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$

dove: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ visto che: $f = \frac{1}{T} = T^{-1}$

ω prende il nome di **velocità angolare** e si misura in rad/s , mentre f è la **frequenza** e si misura in **Hertz (Hz)**. Invece ϕ prende il nome di **fase**. Vediamo da dove esce ω . Consideriamo il moto di una particella e supponiamo che tale moto sia circolare.



C = centro della circonferenza.
 R = raggio

Sulla particella P agiscono due tipi di forze: la forza tangenziale e la forza normale. Quindi si avranno due accelerazioni: l'accelerazione normale (a_n), e l'accelerazione tangenziale (a_t).

Se ipotizziamo che il moto circolare della particella sia uniforme otteniamo che $a_t = 0$ ma $a_n \neq 0$. Siccome:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow F = m \cdot a_n = m \frac{v^2}{R} \text{ ed è l'unica forza che agisce sulla particella.}$$

Indichiamo con ω la velocità angolare. Si ha: $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega dt = d\theta$
Integrando si ottiene:

$$\int_{t_i}^{t_f} \omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta$$

Siccome però il moto circolare è uniforme per ipotesi, allora ω è costante, e sfruttando la proprietà di linearità dell'integrale si ottiene:

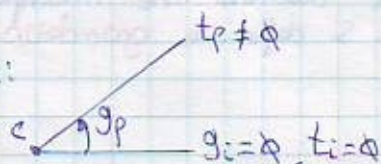
$$\omega \int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta \Rightarrow \omega(t_f - t_i) = \theta_f - \theta_i$$

Supponiamo che $\theta_i = 0$ e $t_i = 0$ si ottiene:

$$\omega t_f = \theta_f$$

Se si compie un giro completo si ha:

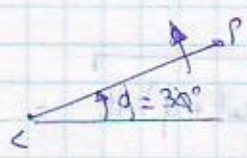
$$\theta_f = 2\pi \Rightarrow \omega t_f = 2\pi$$



Quindi: $\omega = \frac{2\pi}{t_f}$. Ma, dopo aver concluso un intero giro $t_f = T \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

In sostanza ω rappresenta la velocità con cui una particella percorre un giro completo. La frequenza invece rappresenta il numero di giri compiuti dalla particella in un secondo. La fase rappresenta la posizione angolare da cui la particella parte. Tale

posizione può essere zero (angolo iniziale) oppure può partire per esempio da un angolo $q = 30^\circ$.



Si noti che q si esprime in radianti.

Siccome la funzione sinusoidale (cosinusoidale) è periodica di periodo $T = 2\pi$, il suo valore medio è nullo. Infatti:

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_q^{2\pi} y_m \cos(\omega t + q) dt = \frac{y_m}{2\pi} \int_q^{2\pi} \cos(\omega t + q) dt =$$

$$= \frac{y_m}{2\pi} (\sin(\omega t + q))_q^{2\pi} = 0$$

Sia ora $y(t)$ una grandezza alternata di periodo T , si definisce **valore medio** in un **semiperiodo** con riferimento alla **semionda positiva** il seguente numero:

$$y_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} y(t) dt$$

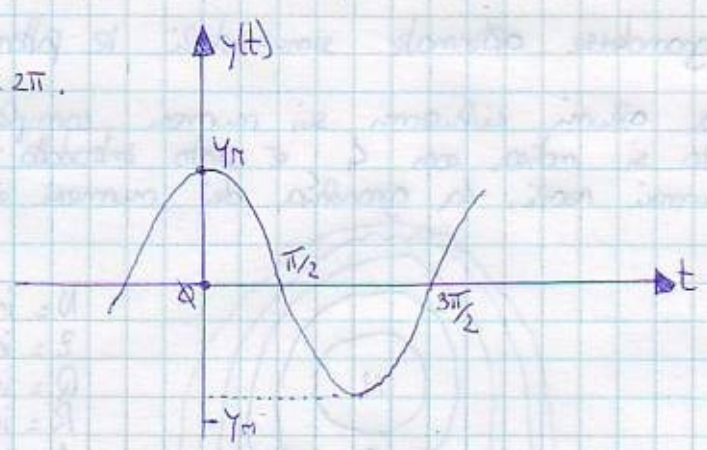
Si consideri, a titolo di esempio, una funzione del tipo:

$$y(t) = y_m \cos(t) \text{ con } q=0 \text{ e } T=2\pi.$$

Abbiamo:

$$y_m = \frac{2}{2\pi} \int_{3/2\pi}^{5/2\pi} y_m \cos(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} y_m [\sin(t)]_{3/2\pi}^{5/2\pi} = \frac{2}{\pi} y_m$$



Data poi una grandezza alternata $y(t)$, si definisce **valore efficace** il seguente numero:

$$y_{eff} = Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t) dt}$$

• NB: Spesso il valore efficace si indica con RMS = Root Mean Square.

Quest'ultimo numero dipende dalle caratteristiche della grandezza alternata. L'importanza di questo numero è legata al fatto che gli strumenti di misura utilizzati in elettronica misurano il valore efficace di una grandezza elettrica. Se $y(t)$ è una grandezza alternata sinusoidale si ottiene:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} = \sqrt{\frac{y_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t + \phi) dt} =$$

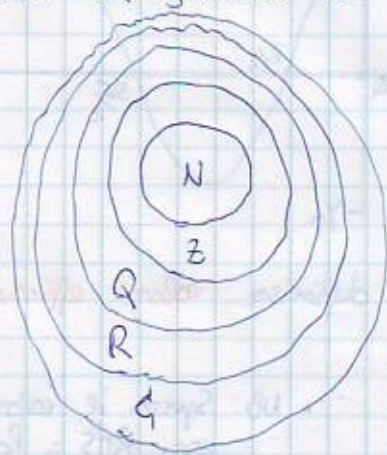
$$= \dots$$

Infine si definisce **fattore di forma** il rapporto tra il valore efficace e il valore medio in un semiperiodo con riferimento alla semionda positiva:

$$K_p = \frac{Y}{Y_m}$$

Per tutte le grandezze alternate sinusoidali il fattore di forma vale 1,11.

Vediamo ora alcuni richiami sui numeri complessi. L'insieme dei numeri complessi, che di solito si indica con $\mathbb{C}$ è stato introdotto storicamente per superare alle limitazioni dei numeri reali. La gerarchia dei numeri è la seguente:



- $\mathbb{N}$ = insieme numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ = insieme numeri interi
- $\mathbb{Q}$ = insieme numeri razionali
- $\mathbb{R}$ = insieme numeri reali
- $\mathbb{C}$ = insieme numeri complessi

Un numero complesso è un numero che può essere scritto nella seguente forma:

$$\underline{z = x + iy} \quad \text{dove } x = \text{parte reale}$$

$$y = \text{parte immaginaria}$$

Nel campo reale $\mathbb{R}$, non è possibile estrarre la radice quadrata di un numero negativo

intra nel campo complesso quest'ultima operazione è valida. In questo modo il modo di
 nome di unità immaginaria ed è tale che:

$$i = \sqrt{-1}$$

La precedente rappresentazione di un numero complesso prende il nome di rappresen-
tazione algebrica. Si noti che x, y sono numeri reali e quindi:

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)}$$

Si noti inoltre che 'i' è la soluzione dell'equazione $z^2 + 1 = 0$. Sono ora z_1 e z_2 due
 numeri complessi. Se:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \text{ossia: } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Per esempio:

$$\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$$

Realizziamo alcune operazioni sui numeri complessi:

$$1) (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2$$

$$\downarrow$$

$$x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$2) (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$3) (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

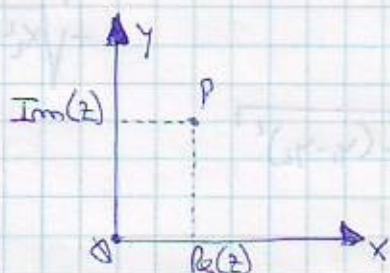
In particolare il coniugato di un numero complesso $z = x + iy$ è:

$$\underline{\bar{z} = x - iy}$$

Si noti che:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

Il numero complesso z può venire rappresentato tramite un punto sul piano complesso.



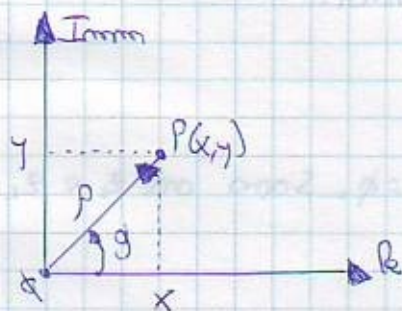
Si chiama modulo del numero complesso la seguente espression-
 ne:

$$\underline{\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Analogamente si chiama **argomento (fase)** di un numero complesso la seguente espressione:

$$\text{Arg}(z) = \vartheta = \text{Arctg} \frac{y}{x}$$

Se prendiamo le velle posizione de unisce l'origine del piano complesso con il punto $P(x,y)$ otteniamo il modulo di $z = x+iy$ e la lunghezza del vettore, mentre ϑ è la fase di z , ossia l'angolo de l'asse x forma con il vettore.



Si noti in particolare de:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad (\text{COORDINATE POLARI}).$$

Intanto si può anche scrivere un numero complesso in questa forma:

$$z = \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Questa ultima rappresentazione prende il nome di **rappresentazione trigonometrica**. Esiste poi un'importante formula nota come **formula di Eulero** la quale afferma de:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

e quindi: $z = \rho e^{i\vartheta}$ $\rightarrow$ **rappresentazione esponenziale** di un numero complesso.

Vediamo ancora un paio di operazioni con i numeri complessi:

$$\begin{aligned} b) \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 - iy_1 y_2 + iy_1 x_2 - i^2 x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

$$c) \text{ se: } |z_1| = |x_1 + iy_1| \Rightarrow |z_1 + z_2| = |(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)|$$

$$|z_2| = |x_2 + iy_2|$$

$$\text{Ra: } |x_1 + iy_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$|x_2 + iy_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2)} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

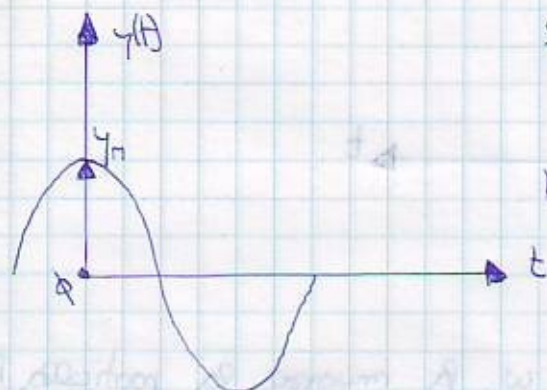
$$\text{Quindi: } |x_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$d) \text{ Dati due punti: } A(x_1, y_1) \text{ e } B(x_2, y_2) \text{ la distanza } |A-B| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Vediamo ora come leggere i numeri complessi con le grandezze sinusoidali. Consideriamo:

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$

dove ω è la pulsazione, ϕ la fase e Y_m è l'ampiezza.



Sussiste la seguente relazione:

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[Y_m e^{j(\omega t + \phi)}]$$

Dimostriamo:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) \\ \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) \end{cases}$$

Consideriamo la prima delle due espressioni. Se al posto di x poniamo $(\omega t + \phi)$ otteniamo:

$$\cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \phi)})$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per Y_m si ottiene:

$$Y_m \cos(\omega t + \phi) = Y_m \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \phi)})$$

Ponendo Y_m del secondo membro dentro le parentesi si conclude la dimostrazione. Da quest'ultima relazione definiremo il concetto di **fasore**. Sappiamo che:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_m$$

$$\Downarrow$$

$$Y_m = \sqrt{2} Y$$

Sostituendo quest'ultima relazione nell'espressione dimostrata otteniamo:

$$y(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} Y e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2} Y e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}]$$

Ponendo: $\vec{Y} = Y e^{j\phi}$ come **fasore associato a $y(t)$** otteniamo:

$$\underline{y(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \vec{Y} e^{j\omega t}]}$$