REGIME SINUSOIDALE

Fino ad ora abbiamo considerato grandezze elettriche costanti nel tempo. Nel regime sinusoidale tali grandezze elettriche sono delle sinusoidi. Prima di parlare di regime sinusoidale premiamo alcune definizioni. Sia $y(t)$ una generica funzione del tempo. Una funzione non costante nel tempo può essere di due tipi:

1) periodica

2) non periodica (aperiodica)

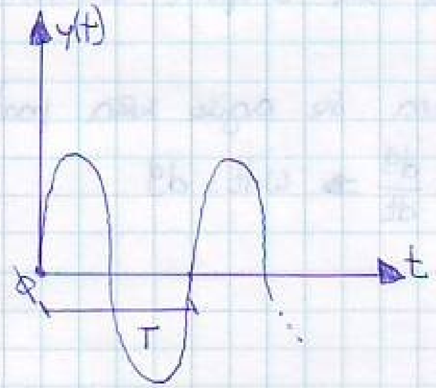
Una funzione $y(t)$ si dice periodica di periodo T se soddisfa la seguente condizione:

$$f(t) = f(t + nT) \quad \forall t > 0 \ , \ \forall n \in N$$

Si noti che N è l'insieme dei numeri naturali. In sostanza una funzione periodica si ripete nella stessa maniera ogni intervallo di tempo T. T prende il nome di periodo. Si noti che:

$$T > 0$$

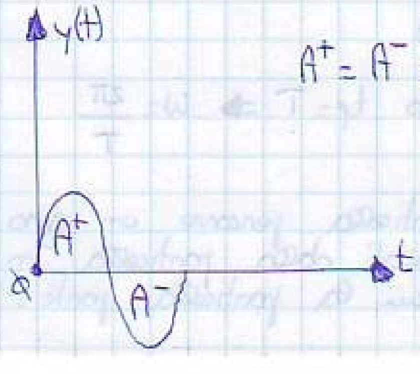
Un esempio di funzione periodica è il seguente:



Data una generica funzione periodica $y(t)$ di periodo T, si definisce valor medio di $y(t)$ il seguente numero:

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\,dt \qquad \text{dove } t_0 > 0.$$

Quindi il valor medio è quel numero che moltiplicato per T fornisce l'area della funzione nell'intervallo di tempo T. Si definisce grandezza alternata una funzione periodica avente valor medio nullo.



$A^+ = A^- \Rightarrow \bar{y} = 0$. Non necessariamente una funzione periodica è una grandezza alternata. Perché ciò accada è necessario che essa sia periodica con valor medio nullo.

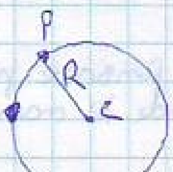
(71)

Le funzioni sinusoidali appartengono alla classe delle grandezze alternate. In generale una funzione sinusoidale si scrive così:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dove: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ visto che: $f = \frac{1}{T} = T^{-1}$

ω prende il nome di pulsazione angolare e si misura in rad/s, mentre f è la frequenza e si misura in Hertz (Hz). Invece φ prende il nome di fase. Vediamo da dove esce ω. Consideriamo il moto di una particella e supponiamo che tale moto sia circolare.



C = centro della circonferenza.
R = raggio

Sulla particella P agiscono due tipi di forze: la forza tangenziale e la forza normale. Quindi si avranno due accelerazioni: l'accelerazione normale (a_N), e l'accelerazione tangenziale (a_T).

Se ipotizziamo che il moto circolare della particella sia uniforme otteniamo chiaramente che $a_T = 0$ ma $a_N \neq 0$. Siccome:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow F = m \cdot a_N = m\frac{v^2}{R}$$ ed è l'unica forza che agisce sulla particella.

Indichiamo con ω la velocità angolare. Si ha: $\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow \omega dt = d\vartheta$
Integrando si ottiene:

$$\int_{t_i}^{t_p} \omega dt = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_p} d\vartheta$$

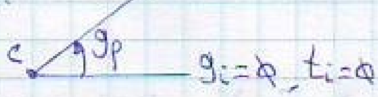
Siccome però il moto circolare è uniforme per ipotesi, allora ω è costante, e sfruttando la proprietà di linearità dell'integrale si ottiene:

$$\omega \int_{t_i}^{t_p} dt = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_p} d\vartheta \Rightarrow \omega(t_p - t_i) = \vartheta_p - \vartheta_i$$

Supponiamo che $\vartheta_i = 0$ e $t_i = 0$ si ottiene:

$$\omega t_p = \vartheta_p$$

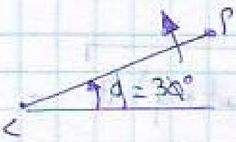
Se si compie un giro completo si ha:



$$\vartheta_p = 2\pi \Rightarrow \omega t_p = 2\pi.$$

Quindi: $\omega = \frac{2\pi}{t_p}$. Ma, dopo aver compiuto un angolo giro $t_p = T \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

In sostanza ω rappresenta la velocità con cui una particella percorre un giro completo. La frequenza invece rappresenta il numero di giri compiuti dalla particella in un secondo. La fase rappresenta la posizione angolare da cui la particella parte. Tale posizione può essere zero (angolo iniziale) oppure la particella può partire per esempio dall'angolo $\varphi = 30°$.



Si noti che φ si esprime in radianti.

Siccome la funzione sinusoidale (cosinusoidale) è periodica di periodo $T = 2\pi$, il suo valor medio è nullo. Infatti:

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_M \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{y_M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t+\varphi)\,dt =$$

$$= \frac{y_M}{2\pi}\left(\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right)_0^{2\pi} = 0$$

Sia ora $y(t)$ una grandezza alternata di periodo T, si definisce valor medio in un semiperiodo con riferimento alla semionda positiva il seguente numero:

$$y_m = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T/2} y(t)\,dt$$

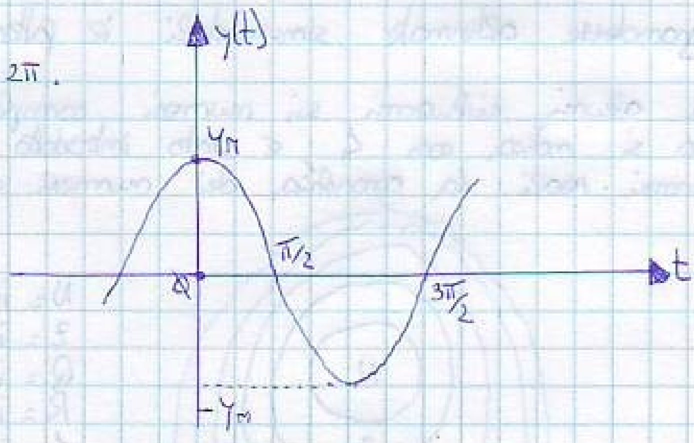
Si consideri, a titolo di esempio, una funzione del tipo:

$y(t) = y_M \cos(t)$ con $\varphi = 0$ e $T = 2\pi$.

Abbiamo:

$$y_m = \frac{2}{2\pi}\int_{3/2\pi}^{5/2\pi} y_M \cos(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} y_M \left[\operatorname{sen}(t)\right]_{3/2\pi}^{5/2\pi} = \frac{2}{\pi} y_M$$



Data poi una grandezza alternata $y(t)$, si definisce valore efficace il seguente numero:

$$y_{eff} = Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\,dt}$$

• NB: Spesso il valore efficace si indica con RMS = Root Mean Square.

Quest'ultimo numero dipende dalle caratteristiche della grandezza alternata. L'importanza di questo numero è legata al fatto che gli strumenti di misura utilizzati in elettronica misurano il valore efficace di una grandezza elettrica. Se $y(t)$ è una grandezza alternata sinusoidale si ottiene:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{t_0+T} Y_M^2 \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} Y_M^2 \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt} = \sqrt{\frac{Y_M^2}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt} =$$

$$= \dots$$

Infine si definisce fattore di forma il rapporto tra il valore efficace e il valore medio in un semiperiodo con riferimento alla semionda positiva:

$$K_f = \frac{Y}{Y_m}$$

Per tutte le grandezze alternate sinusoidali il fattore di forma vale 1,11.

Vediamo ora alcuni richiami sui numeri complessi. L'insieme dei numeri complessi che di solito si indica con $\mathbb{C}$ è stato introdotto storicamente per sopperire alle limitazioni dei numeri reali. La gerarchia dei numeri è la seguente:

N = insieme numeri naturali
Z = insieme numeri interi
Q = insieme numeri razionali
R = insieme numeri reali
C = insieme numeri complessi

Un numero complesso è un numero che può essere scritto nella seguente forma:

$$z = x + iy$$ dove x = parte reale, y = parte immaginaria

Nel campo reale R, non è possibile effettuare la radice quadrata di un numero negativo

, invece nel campo complesso quest'ultima operazione è lecita. Per questo motivo i prende il nome di unità immaginaria ed è tale che:

$$i=\sqrt{-1}$$

La precedente rappresentazione di un numero complesso prende il nome di rappresentazione algebrica. Si noti che x, y sono numeri reali e quindi:

$$x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow z = Re(z) + i\,Imm(z)$$

Si noti inoltre che i è la soluzione dell'equazione $i^2+1=0$. Siano ora z_1 e z_2 due numeri complessi. Se:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1+iy_1 = x_2+iy_2 \quad \text{ossia: } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Per esempio:

$$\begin{cases} x^2-3=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ y=\mp\sqrt{3} \end{cases}$$

Vediamo alcune operazioni sui numeri complessi:

1) $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2$

$$\Downarrow$$

$$x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

2) $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = x_1+x_2+i(y_1+y_2)$

3) $(x_1-iy_1)-(x_2-iy_2) = x_1-x_2+i(y_1-y_2)$

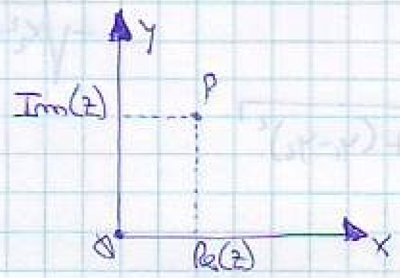
In particolare il coniugato di un numero complesso $z = x+iy$ è:

$$\bar{z} = x - iy$$

Si noti che:

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{iyx} - i^2y^2 = x^2+y^2$$

Il numero complesso z può venire rappresentato tramite un punto sul piano complesso.



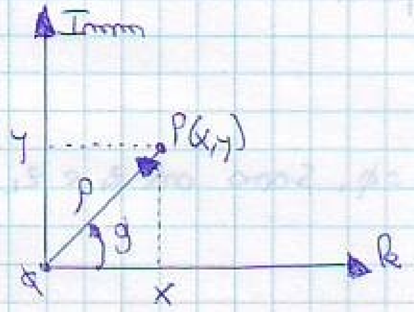
Si chiama modulo del numero complesso la seguente espressione:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Analogamente si chiama argomento (fase) di un numero complesso la seguente espressione:

$$Arg(z) = \vartheta = Arctg \frac{y}{x}$$

Se prendiamo il vettore posizione che unisce l'origine del piano complesso con il punto $P(x,y)$ allora il modulo di $z = x+iy$ è la lunghezza del vettore, mentre ϑ è la fase di z, ossia l'angolo che l'asse x forma con il vettore.



Si noti in particolare che:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \quad \text{(COORDINATE POLARI)}.$$

Pertanto si può anche scrivere un numero complesso in questa forma:

$$z = \rho\cos\vartheta + i\rho\operatorname{sen}\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Quest'ultima rappresentazione prende il nome di rappresentazione trigonometrica. Esiste poi un'importante formula nota come formula di Eulero la quale afferma che:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta$$

e quindi: $z = \rho e^{i\vartheta}$ → rappresentazione esponenziale di un numero complesso.

Vediamo ancora un paio di operazioni con i numeri complessi:

4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2} = \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2 - iy_1y_2 i + iy_1x_2 - ix_1y_2}{x_2^2+y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

5) se: $|z_1| = |x_1+iy_1|$ ⇒ $|z_1+z_2| = |(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)|$
$|z_2| = |x_2+iy_2|$

da: $|x_1+iy_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$
$|x_2+iy_2| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$ ⇒ $\sqrt{(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

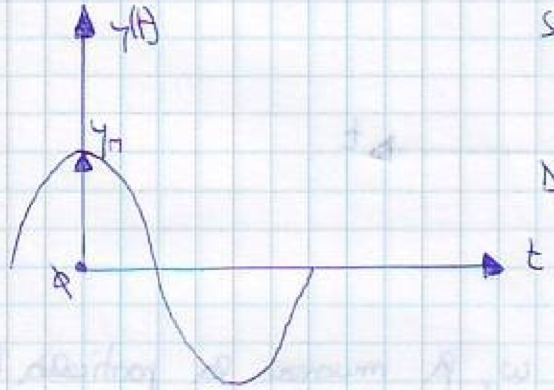
Quindi: $|x_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

6) Dati due punti: $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ la distanza $|A-B| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Vediamo ora come legare i numeri complessi con le grandezze sinusoidali. Consideriamo:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dove ω è la pulsazione, φ la fase e Y_M è l'ampiezza.



Sussiste la seguente relazione:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi) = Re[Y_M e^{j(\omega t + \varphi)}].$$

Dimostriamolo:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{con:} \begin{cases} \cos x = Re(e^{ix}) \\ \operatorname{sen} x = Imm(e^{ix}) \end{cases}$$

Consideriamo la prima delle due espressioni. Se al posto di x poniamo $(\omega t + \varphi)$ otteniamo:

$$\cos(\omega t + \varphi) = Re(e^{i(\omega t + \varphi)})$$

Moltiplicando entrambi i membri per Y_M si ottiene:

$$Y_M \cos(\omega t + \varphi) = Y_M Re(e^{i(\omega t + \varphi)})$$

Portando Y_M del secondo membro dentro le parentesi si conclude la dimostrazione.
Da quest'ultima relazione definiamo il concetto di fasore. Sappiamo che:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\,dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_M$$

$$\Downarrow$$

$$Y_M = \sqrt{2}\, Y$$

Sostituendo quest'ultima relazione nell'espressione dimostrata otteniamo:

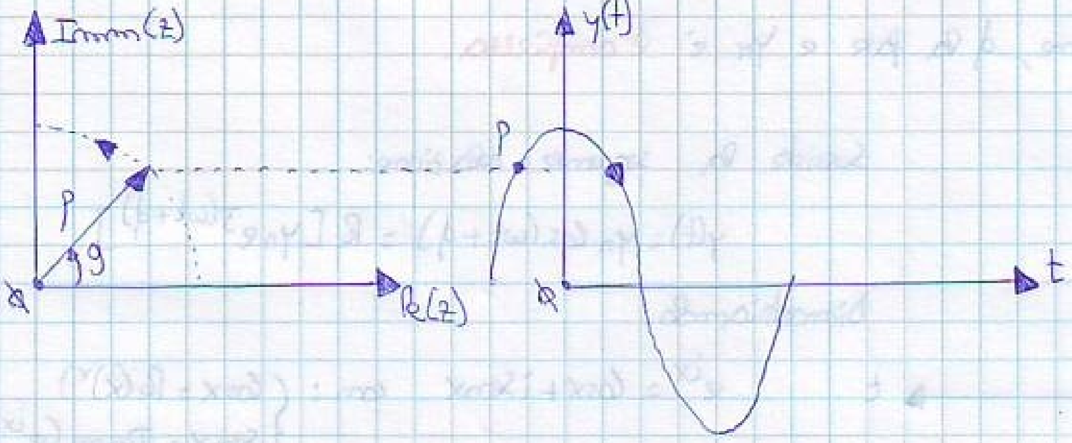
$$y(t) = Re[\sqrt{2}\, Y e^{i(\omega t + \varphi)}] = Re[\sqrt{2}\, Y e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

Ponendo: $\vec{Y} = Y e^{i\varphi}$ come fasore associato a $y(t)$ otteniamo:

$$y(t) = Re[\sqrt{2}\, \vec{Y} e^{i\omega t}]$$

77

Molti definiscono il fasore come quel vettore, sul piano complesso, che genera la sinusoide. In pratica questo fasore contiene in sé l'ampiezza della funzione $y(t)$, e la fase iniziale φ di $y(t)$. Quindi il fasore è quel numero complesso avente per modulo il valore efficace di $y(t)$ e per argomento la fase di $y(t)$.



Il fasore, ruotando con una certa velocità angolare ω, fa muovere la particella P lungo la curva di equazione $y = y(t)$, sia:

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi) = Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\omega t}]$$

Ricordandoci che: $\begin{cases} \vec{Y} = Y e^{i\varphi} \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}} y_m \end{cases}$ $\Rightarrow$ 1) l'operatore $Re(z)$ è lineare e quindi:

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

Dimostriamo questa proprietà:

$$Re(z_1 + z_2) = Re((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) = Re((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

2) L'operatore $Re(z)$ è commutativo rispetto all'operazione di derivazione nel tempo, ossia:

$$\frac{d}{dt}\left(Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\varphi}]\right) = Re\left(\frac{d}{dt}[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\varphi}]\right)$$

Dimostrazione:

se $y(t) = Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\omega t}] \Rightarrow y'(t) = \frac{d}{dt}\left(Re[\sqrt{2}\,\vec{Y} e^{i\omega t}\right)$

Possiamo però rappresentare $y(t)$ anche in questo modo:

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow y'(t) = -\omega y_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega y_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

Pertanto:

$$y'(t) = Re[\sqrt{2}\,\omega \vec{Y} e^{i(\omega t + \varphi + \pi/2)}] = Re[\sqrt{2}\,\omega \vec{Y} e^{(\omega t)} e^{i\pi/2} e^{i\varphi}]$$