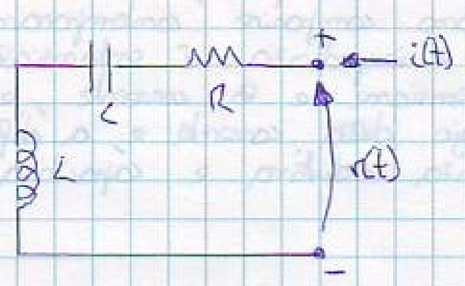
Consideriamo ora il circuito monoporta seguente:



CIRCUITO RLC

Alimentiamo il monoporta con una tensione la cui forma d'onda è:

$$v(t) = V_{sn} \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Siccome il sistema è lineare tempo-invariante segue che la risposta a regime segue l'ingresso e quindi:

$$i(t) = I_n \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Usando le leggi di Kirchhoff si ha:

$$\begin{cases} i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) \\ v_s(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = R \cdot i(t) + L \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_s}{dt}$$

Quest'ultima equazione è un'equazione differenziale del secondo ordine nell'incognita i(t). Non resta che risolvere l'omogenea associata e determinare la risposta a regime algebricamente, ossia trovare un integrale particolare della stessa. Vediamo ora di passare invece ai fasori:

$$\begin{cases} v_s(t) = V_{sn} \cos(\omega t + \varphi_v) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{V}_s e^{j\omega t}\right] \\ i(t) = I_n \cos(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{I} e^{j\omega t}\right] \end{cases}$$

dove: $\begin{cases} \overline{V}_s = V_s e^{j\varphi_v} = \dfrac{V_{sn}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_v} \longrightarrow \text{fasore associato alla tensione} \\ \overline{I} = I e^{j\varphi_i} = I_n/\sqrt{2}\, e^{j\varphi_i} \longrightarrow \text{fasore associato alla corrente} \end{cases}$

Riprendiamo l'equazione differenziale precedente:

$$R\frac{d}{dt}\left(Re\left[\sqrt{2}\,\bar{I}\,e^{j\omega t}\right]\right)+L\frac{d^2}{dt^2}\left(Re\left[\sqrt{2}\,\bar{I}\,e^{j\omega t}\right]\right)+\frac{1}{C}\left(Re\left[\sqrt{2}\,\bar{I}\,e^{j\omega t}\right]\right)=\frac{d}{dt}\left(Re\left[\sqrt{2}\,\bar{V}_s e^{j\omega t}\right]\right)$$

$$\Downarrow$$

$$R\left(Re\left[\sqrt{2}(j\omega)\bar{I}e^{j\omega t}\right]\right)+L\left(Re\left[\sqrt{2}(j\omega)^2\bar{I}e^{j\omega t}\right]\right)+\frac{1}{C}\left(Re\left[\sqrt{2}\,\bar{I}e^{j\omega t}\right]\right)=\left(Re\left[\sqrt{2}(j\omega)\bar{V}_s e^{j\omega t}\right]\right)$$

Siccome e' operatore "parte reale" è lineare si ottiene:

$$R\cdot Re\left((j\omega)\bar{I}e^{j\omega t}\right)+L\cdot Re\left((j\omega)^2\bar{I}e^{j\omega t}\right)+\frac{1}{C}Re\left(\bar{I}e^{j\omega t}\right)=Re\left((j\omega)\bar{V}_s e^{j\omega t}\right)$$

Raccogliendo si ha:

$$Re\left[\left(j\omega R+(j\omega)^2L+\frac{1}{C}\right)\bar{I}\cancel{e^{j\omega t}}\right]=Re\left[(j\omega)\bar{V}_s\cancel{e^{j\omega t}}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(j\omega R+(j\omega)^2L+\frac{1}{C}\right)\bar{I}=(j\omega)\bar{V}_s$$

Concludendo:

$$\bar{V}_s=\left(R+(j\omega)L+\frac{1}{j\omega C}\right)\cdot\bar{I}$$

Abbiamo ottenuto un' equazione algebrica, dove e' unica incognita e' il fasore associato alla corrente. Quindi:

$$Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$$

prende il nome di impedenza di ingresso del circuito. Si osservi che e' impedenza è un numero complesso, ma non è un fasore. Infatti:

$$|Z|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad e \quad \vartheta=\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L-1/\omega C}{R}\right)$$

La parte reale dell' impedenza va sotto il nome di resistenza all' impedenza mentre la parte immaginaria prende il nome di reattanza dell' impedenza. Quindi:

$$\begin{cases} R=Re(Z) \\ X=Imm(Z)\end{cases}$$

Quando l'impedenza dell'ingresso risulta non nulla, si può scrivere:

$$Y = \frac{1}{Z} = Z^{-1} \longrightarrow \text{ammettenza}$$

Naturalmente anche l'ammettenza è un numero complesso e quindi:

$$Y = G + jB$$

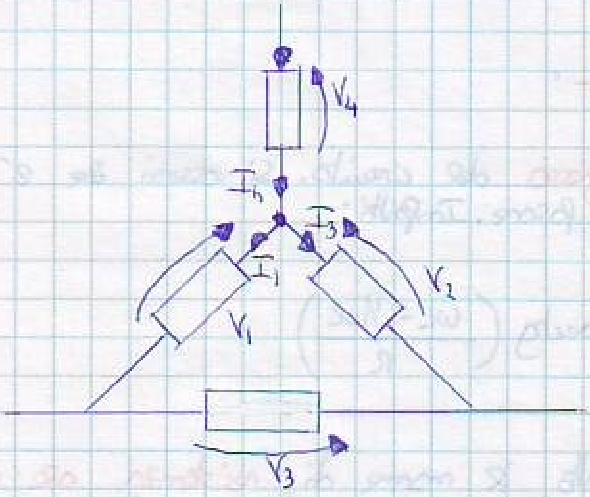
G è la parte reale che viene detta conduttanza, mentre B viene detta suscettanza. Si osservi che, mentre l'ammettenza è l'inverso dell'impedenza, la conduttanza G e la suscettanza B non sono i reciproci di Re(Z) e Imm(Z). Infatti:

$$\begin{cases} G = \dfrac{R}{R^2 + X^2} \\ B = \dfrac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Quindi in conclusione la legge:

$$\bar{V} = Z \cdot \bar{I}$$

è la legge di ohm simbolica. Dato ora il seguente circuito:



Abbiamo: $I_1(t) + I_3(t) - I_h(t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$Re[\sqrt{2}\,\bar{I}_1 e^{j\omega t}] + Re[\sqrt{2}\,\bar{I}_3 e^{j\omega t}] - Re[\sqrt{2}\,\bar{I}_h e^{j\omega t}] = 0$$

Quindi:

$$Re[\sqrt{2}\,\bar{I}_1 e^{j\omega t} + \sqrt{2}\,\bar{I}_3 e^{j\omega t} - \sqrt{2}\,\bar{I}_h e^{j\omega t}] = 0 \Rightarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{I}_h = 0$$

Questo comporta che la legge di kirchhoff delle correnti si può esprimere anche in termini fasoriali. Quindi fissato un circuito, sappiamo di poter trovare una matrice di incidenza A tale che:

$$A \cdot \overline{I} = 0$$

dove:

$$\overline{I} = [\overline{I}_1, \overline{I}_2, \ldots] \rightarrow$$ vettore dei fasori associati alle correnti.

Analogamente si ha per la legge di Kirchhoff delle tensioni:

$$-v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) = 0 \Rightarrow v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 - \overline{V}_3 = 0$$

Analizziamo il caso del collegamento in serie di N elementi. Si ha:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = z_1 \overline{I}_1 \\ \overline{V}_2 = z_2 \overline{I}_2 \\ \vdots \\ \overline{V}_m = z_m \overline{I}_m \end{cases} \Rightarrow \overline{I} = \overline{I}_1 = \overline{I}_2 = \ldots = \overline{I}_m$$

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \ldots + \overline{V}_m$$

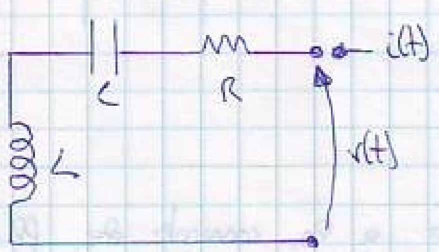
Quindi generalizzando si può scrivere:

$$\begin{cases} \overline{V} = z \cdot \overline{I} \\ z = \sum_{k=1}^{m} z_k \end{cases}$$

Dualmente per il collegamento in parallelo si ha:

$$\begin{cases} \overline{I} = y \overline{V} \\ y = \sum_{k=1}^{m} y_k \end{cases}$$

Riconsideriamo ancora una volta il circuito RLC seguente:



Sia: $v(t) = V_m \cos(\omega t)$

Vogliamo conoscere la corrente assorbita:

$$\begin{cases} |z| = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \end{cases}$$

Quindi:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}} = \frac{V_m}{\rho\sqrt{2}} e^{-j\varphi} \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Pertanto:

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\bar{I} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{V_m}{\rho\sqrt{2}} e^{-j\varphi} e^{j\omega t}\right] = \frac{V_m}{\rho}\cos(\omega t - \varphi)$$

Si noti che non possiamo dire nulla circa lo spostamento della corrente rispetto alla tensione. Possiamo per esempio essere nel caso:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

In questa situazione la reattanza del circuito è nulla e pertanto è nullo lo spostamento tra la tensione e la corrente. In questo caso il circuito è in condizioni di risonanza serie. Nel caso in cui:

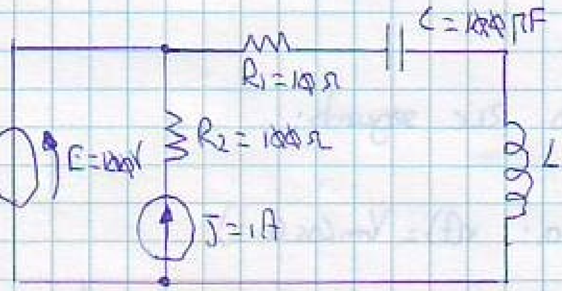
$$\omega L > \frac{1}{\omega C}$$

la reattanza è positiva, φ è positivo e pertanto la corrente è in ritardo di $\varphi°$ rispetto alla tensione. Ciò significa che il circuito è di natura induttiva. Se invece:

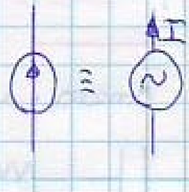
$$\omega L < \frac{1}{\omega C}$$

allora la reattanza del circuito è negativa, φ è negativo e di conseguenza la corrente risulta in anticipo di $\varphi°$ rispetto alla tensione. Il circuito così è di natura capacitiva. Vediamo qualche esempio:

1) Sia dato il seguente circuito in regime sinusoidale:

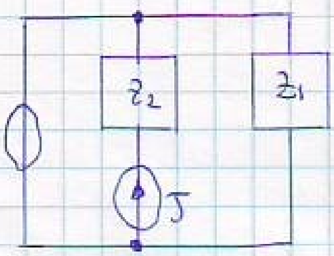


• NB:



Calcolare la tensione ai capi del condensatore e la corrente che fluisce nel generatore di tensione, assumendo la tensione del generatore di tensione come riferimento.

Possiamo rappresentare così il circuito:



$$\begin{cases} Z_1 = R_1 + j(\omega L - 1/\omega C) \\ Z_2 = R_2 \end{cases}$$

Ne segue che: $\bar{I}_{Z_1} = \dfrac{\bar{E}}{Z_1}$

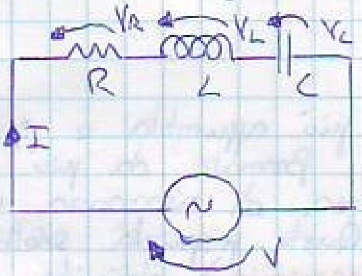
$$\bar{V}_C = Z_C \bar{I}_{Z_1} = Z_C \frac{\bar{E}}{Z_1} = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\cdot\frac{E}{R_1 + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

$$= \frac{E/\omega C}{R_1 + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

Per quanto riguarda la corrente si ha:

$$\bar{I}_E = \bar{J} - \bar{I}_{Z_2} = \bar{J} - \frac{\bar{V}_{Z_2}}{Z_2} = \bar{J} - \frac{\bar{E}}{Z_2}$$

Consideriamo ora il seguente circuito:



Si ha: $\begin{cases} X_L = \omega L = 2\pi f L \\ X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f C} \end{cases}$

L'impedenza totale del circuito è:

$$Z = R + j(X_L - X_C) \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Pertanto la corrente assorbita è:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \text{con sfasamento: } \varphi = \text{Arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

La prima cosa che risulta evidente è che esiste un valore di ω per cui:

$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

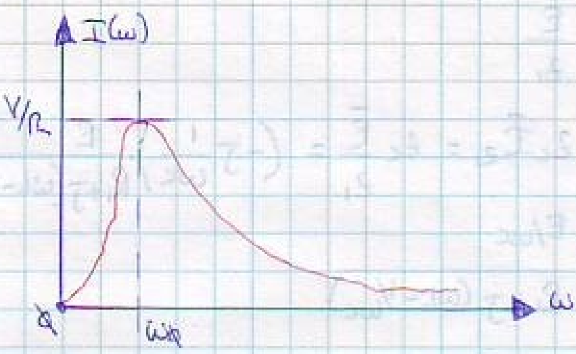
Questo valore è:

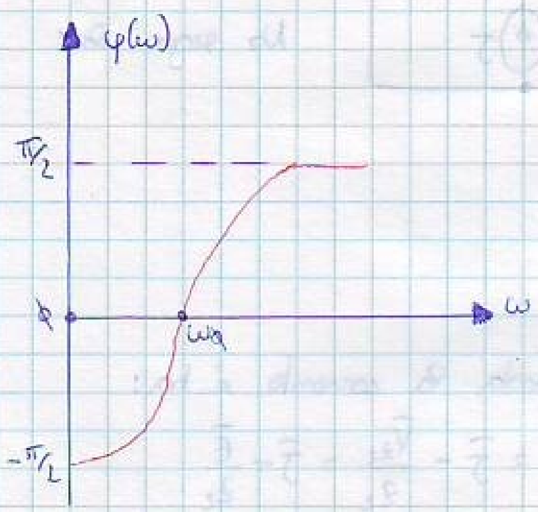
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ chiamata pulsazione di risonanza.

Pertanto se alimentiamo un circuito serie RLC con un segnale avente pulsazione ω_0, esso si comporta come un circuito resistivo. Si osservi inoltre che:

$$\begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow I(0) = 0 \\ \omega \to \infty \Rightarrow I(\infty) \to 0 \end{cases}$$

Graficamente si ha:





Ricordandosi che:

$$X_L = X_C \Rightarrow 2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Al diminuire di R, la curva di risonanza diventa più appuntita e quindi il circuito diventa più selettivo, ossia per un segnale formato da più armoniche, sono ostacolate di meno la componente con frequenza di risonanza e quelle con frequenze ad essa vicine. Le altre vengono eliminate. Queste proprietà selettive vengono valutate con la cifra di merito (coefficiente di risonanza) definita come:

$$Q = \frac{X_L \cdot I}{R \cdot I} = \frac{X_C \cdot I}{R \cdot I}$$

Siccome: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Maggiore è Q e maggiore è la selettività del circuito. Q può essere vista anche come un indice della capacità di un circuito di immagazzinare energia rispetto alla possibilità di dissiparla nella resistenza.