

I requisiti statici sono:

(5h)

- 1) in corrispondenza di andamenti delle variabili indipendenti incoste, cioè:

$$\begin{cases} c(t) = A_i \cos(t) \\ \dot{c}(t) = \dot{A}_i \cos(t) \\ \text{con } |A_i| \leq A_{i\max} \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

e dove con ε un qualunque ingesso canonico, per si' che:

$$|\varepsilon_{\text{col}}| \leq \varepsilon_{\text{max}}$$

Si richi' che:

$$|\varepsilon_{\text{col}}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon(t)|$$

Inoltre si richiede che l'azione di controllo esista da una variazione a scalino del riferimento non superi u_{max} . In breve:

$$\max_{t \in [0, \infty)} |\dot{u}(t)| \leq u_{\text{max}}$$

Quindi il metodo di progetto opera in due fasi:

- 1) PROGETTO STATICO
- 2) PROGETTO DINAMICO

Analizziamo la prima. Posto:

$$\bar{r}_R = \bar{r}_R \tilde{r}_1$$

$$R(s) = \frac{r_R}{s g_R}$$

$$\text{visto che: } R(s) = \bar{R}(s) \tilde{R}(s) \\ \text{(CONTROLLATORE LIBERO)}$$

Perch' il sistema quadrato e l'ho del regolatore da tutti le parti, in modo che R sia proprio si sceglie g_R come valore minimo (non negativo) che consente di soddisfare le specifiche statiche. Se le specifiche risultano soddisfatte per ogni $\bar{r}_R$ si pone $\tilde{r}_1 = 1$ e con il progetto dinamico si trova $\bar{r}_R$. Se ci' non avviene, si determina il valore minimo di $\bar{r}_R$ che soddisfa le specifiche statiche. Per prudenza si fa:

$$\bar{r}_R = d r_{R\text{min}} \quad \text{con } d = 1,5 \div 3$$

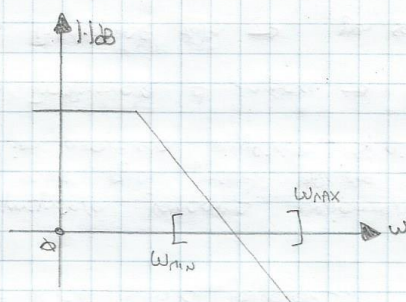
e si introduce il vincolo $\tilde{r}_1 \geq 1$. Si passa poi al progetto dinamico. Posto:

$$\tilde{r}_1 \tilde{R}(s), \quad \tilde{R}(s) = \frac{\pi_i (1 + s f_i)}{\pi_k (1 + s T_k)}$$

Poniamo $\tilde{r}_1 = 1$ se dal progetto statico non si' determinato $\tilde{r}_1$. Quindi ricapitolando, e' utile specificare i requisiti in requisiti statici e requisiti dinamici. Consideriamo lo schema di prima, e si ha:

$$L(s) = \frac{r_R}{s g_R} P(s)$$

e supponiamo che:



ci manca da descrivere la relazione dei disturbi o i relativi vincoli.

Dobbiamo fare in modo che $q_m \geq q_{min}$ e $w \geq w_{min}$. Quali sono, a grandi linee i requisiti (specifiche dinamiche). I requisiti o meglio il requisito statico è:

$$\varepsilon_{ss} \leq \varepsilon_{max}$$

Abbiamo visto che ci sono due tipi di disturbi. I disturbi sulla linea di andata, e i disturbi sulla linea di retroazione. La relazione dei disturbi altro non è che il respingimento di tali. Come effettuare tale relazione e l'abbiamo già visto quando abbiamo parlato di Banda Passante (P.B). Vediamo ora di descrivere un modello matematico per descrivere come un determinato sistema stabilizza la sua uscita dopo una variazione dell'ingresso. La TRASFORMATTA DI LAPLACE permette di convertire un'equazione differenziale del dominio del tempo in una forma più semplice da comprendere. Sia $p(t)$ un generico segnale nel dominio del tempo.

$$F(s) = \int_0^{\infty} p(t) e^{-st} dt \quad \rightarrow \quad \text{TRASFORMATTA DI LAPLACE } F(s) \text{ di } p(t).$$

Si noti che s è una variabile complessa. Una variabile (o semplicemente un numero) complessa è una variabile che si può scrivere in questa maniera:

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad \text{FORMA ALGEBRICA DI UN NUMERO COMPLESSO}$$

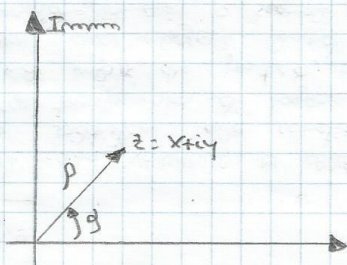
dove x viene detta parte reale e iy viene detta parte immaginaria. L'unità i viene detta unità immaginaria:

$$i = \sqrt{-1}$$

Si ricordi che:

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = -1, \dots$$

Una variabile complessa viene sempre rappresentata sul piano di GAUSS:



$$p = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \text{MODULO}$$

$$q = \arctg \frac{y}{x} \rightarrow \text{FASE}$$

Posto:

$$\begin{cases} x = p \cos q \\ y = p \sin q \end{cases} \quad \text{COORDINATE POLARI}$$

$$z = p(\cos q + i \sin q) \rightarrow \text{RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA}$$

Esiste poi anche la FORMA ESPONENZIALE di un numero complesso:

$$z = p e^{i\theta}$$

Di solito s è una mda anche come VARIABILE DI LAPLACE, con la dimensione $1/\text{secondo}$. Perché $F(s)$ esista, $f(t)$ deve soddisfare certe condizioni che verranno riprese successivamente. Per ora, basti sapere che la trasformata di Laplace tratta un segnale come se fosse avuto al tempo $t=0$. Si noti infatti che per $t < 0$, $f(t)$ ha un determinato comportamento che non influisce al valore dell'integrale. Quindi $F(s)$ può essere utilizzata per modellizzare una situazione in cui il segnale sia applicato improvvisamente all'ingresso del sistema al tempo $t=0$. Quindi la trasformata di Laplace risulta ideale per modellizzare gli effetti del sistema provocati da cambiamenti improvvisi dell'ingresso. Ad esempio si può pensare che all'ingresso sia presente un gradino oppure un impulso. Quindi la trasformazione di Laplace trasforma una funzione di variabile reale in una funzione di variabile complessa. Simili a $f(t)$ esiste una, sola, $F(s)$. La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà:

$$1) \quad x(t) \leftrightarrow X(s), \quad y(t) \leftrightarrow Y(s) \Rightarrow x(t) + y(t) \leftrightarrow X(s) + Y(s)$$

$$2) \quad x(t) \leftrightarrow X(s), \quad k: \text{costante} \Rightarrow kx(t) \leftrightarrow kX(s)$$

Queste proprietà sono note come proprietà di LINEARITÀ. Quindi la trasformata di Laplace associa una funzione $F(s)$ di una variabile complessa s con una qualsiasi opportuna funzione $f(t)$ di variabile reale. Questa corrispondenza, nella maggior parte dei casi, è di tipo 1-1. Simili a $f(t)$ esiste una, sola, $F(s)$.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t) e^{-st} dt \quad a < a < b$$

Come vedremo successivamente, le trasformate di Laplace sono utilissime anche nel campo digitale. Tra le varie proprietà di cui gode la trasformata di Laplace ci sono:

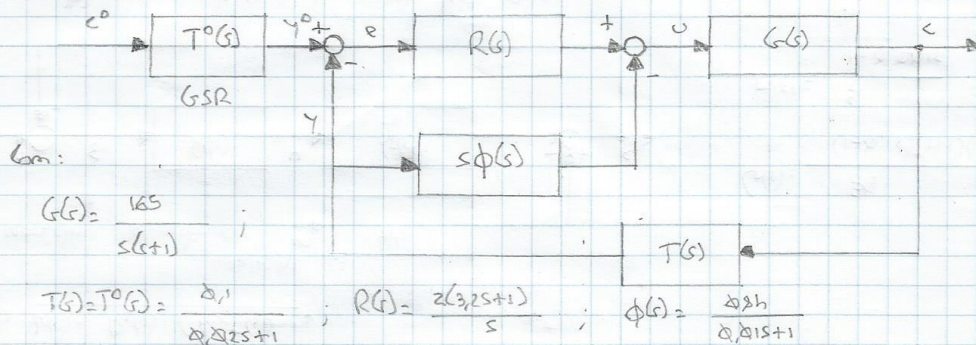
- 1) LINEARITÀ
- 2) RITARDO (o ANTICIPA)
- 3) PRODOTTO DI CONVOLUZIONE REALE
- 4) PRODOTTO
- 5) ENERGIA TOTALE (o di POTENZA).

Tutte queste proprietà verranno ampiamente discusse più avanti. Negli esempi che seguono sono già presenti alcune nozioni inerenti alla trasformata di Laplace poste in maniera impercettibile, si ricordi infine che:

- Trasformata di Laplace $\rightarrow$ per segnali continui,
- Trasformata Zeta $\rightarrow$ per segnali discreti.

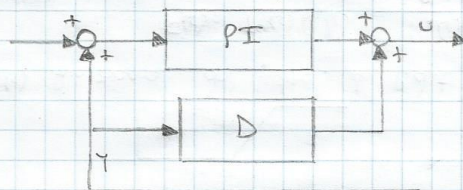
Facciamo ora qualche esempio:

1) Si consideri il seguente sistema di controllo:



Si studi la precisione dinamica.

2) Si osservi che lo schema a blocchi presentato è un PID a derivazione dell'uscita. Si ricordi infatti che un PID è un controllore ad azione proporzionale, derivativa, e integrale e che quindi:



D = azione derivativa

$$NB: \begin{cases} PI \equiv R(s) \\ D \equiv s\phi(s) \end{cases}$$

Si noti che l'azione derivativa agisce sull'uscita y anziché sull'errore e. Si noti che:

$$R(s) = \frac{2(3,2s+1)}{s} \Rightarrow \begin{cases} 3,2 = T_i \\ K_p = 6,4 \end{cases}; \quad s\phi(s) = \frac{0,8h}{0,015s+1}$$

Si ricordi infatti che:

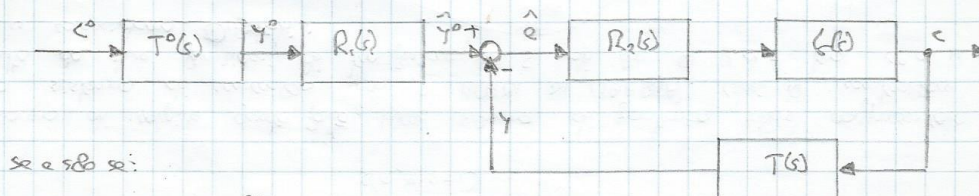
$$v(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} T_D = 0,13 \\ N = 13 \end{cases}$$

e la relativa f.d.t. è:

$$R_{PID}(s) = \mu \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{s}$$

Il sistema di partenza è equivalente al seguente:



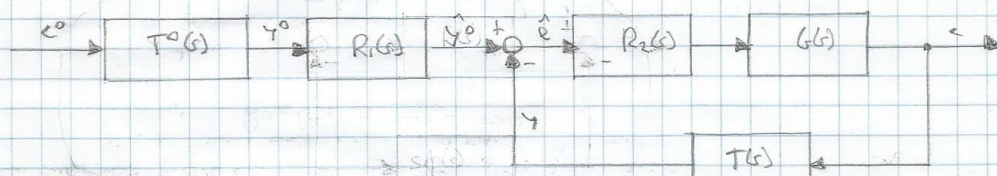
se e solo se:

$$R_1(s) = \frac{R(s)}{R(s) + s\phi(s)} = \frac{(3,2s+1)(0,015s+1)}{(3,06s+1)(0,1136s+1)}$$

$$R_2(s) = R(s) + s\phi(s) = \frac{2(3,26s+1)(4,1476s+1)}{(4,81s+1)}$$

59

Andiamo di capire quale fatto. Un sistema di feedback viene rappresentato un tipico sistema di controllo con 2 GRADI DI LIBERTÀ. Cioè il controllore è descritto da due funzioni di trasferimento. Simili che a p.d.t tra c' a u e da S a u coincidono. Quindi:



Simili che qui $R_2(s)$ è la p.d.t di un controllore PID a derivazione differenziale. Quindi:

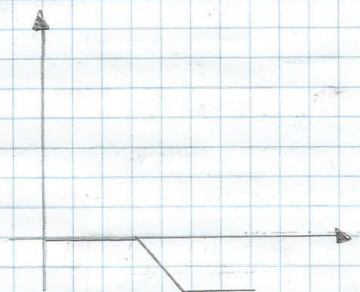


DIAGRAMMA DI BODE di $R_2(s)$

$$R_2(s) = \frac{(3,26s+1)(4,1476s+1)}{(4,81s+1)}$$

FILTRO PASSA - BASSO.

Quindi $R_2(s)$ funziona da filtro. La p.d.t da c' a c è:

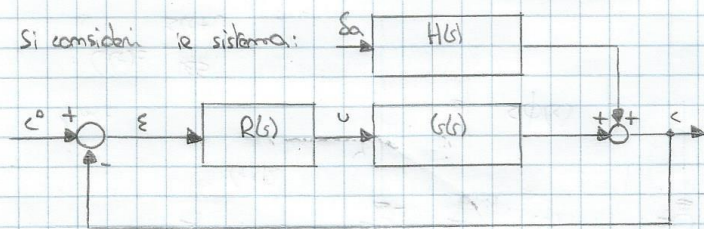
$$F(s) = T'(s) R_1(s) \frac{R_2(s) G(s)}{1 + R_2(s) G(s) T(s)}$$

Se come $T'(s) = T(s)$ si ha:

$$F(s) = R_1(s) \frac{R_2(s) G(s) T(s)}{1 + R_2(s) G(s) T(s)} \Rightarrow F(s) = R_1(s) \frac{L(s)}{1 + L(s)} = R_1(s) F_0(s)$$

con $L(s) = R_2(s) \cdot G(s) T(s)$.

2) Si consideri il sistema:



$$G(s) = \frac{5s}{(1+0,1s)(1+s)(1+10s)}$$

$$H(s) = \frac{5}{1+0,001s}$$

Si progetti un controllore, in modo che:

- $|\varepsilon_{ss}| \leq 0,025$ quando $c'(t) = \sin(\omega t)$, $d'(t) = \pm \sin(\omega t)$
- $\omega_c \geq 1$ rad/sec

• $\varphi_{pm} = 60^\circ$

(59)

2) Si osserva subito che $H(s)$ è:

$$H(s) = \frac{5}{1 + 4.5 \times 10^{-3} s} \Rightarrow p_1 = \frac{-1}{4.5 \times 10^{-3}} \approx -222 \text{ rad/s}$$

Quindi $H(s)$ è asintoticamente stabile. Vediamo il progetto statico. Fabbriazziamo $R(s)$:

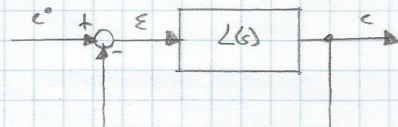
$$R(s) = \bar{R}(s) \tilde{R}(s)$$

$$\text{con: } \bar{R}(s) = \frac{1/r}{s g_R}, \quad \tilde{R}(s) = \frac{\prod_i (1 + s \tau_i)}{\prod_k (1 + s T_k)} \quad (\tilde{R}(0) = 1)$$

Nei progetti statici si vuole determinare la p.d.t. $\bar{R}(s)$ in modo che $|E_{ss}| \leq \epsilon_{max} = 0.025$. Siccome il sistema è lineare si può utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Questo ci permette di studiare separatamente gli effetti sulle diverse modalità da C^0 e dai disturbi $d(t)$. Poi, ovviamente si sommano i contributi.

1) ERRORE DOWTO AL RIFERIMENTO: (E^0) $\Rightarrow E^0(s) = \frac{1}{1+L(s)} C^0(s) = \frac{S(s) C^0(s)}{1+L(s)}$
 Si ricorda che:
 $E^0 = S(s) C^0(s)$

dove $S(s)$ è la p.d.t. da C^0 a E .
 Per il calcolo del valore a regime di E^0 ci si rimanda al th del valore finale. Quindi:



$$E^0 = \lim_{s \rightarrow 0} (s E^0(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{1+R(s)G(s)} C^0(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{1+s \frac{1/r}{g_R}} \frac{1/s}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/s}{1+s \frac{1/r}{g_R}} = \frac{1/s}{1+s \frac{1/r}{g_R}} \Big|_{s=0} = \frac{1/s}{1} = 1/s$$

NB: $L(s) = R(s) \cdot G(s)$

NB: la trasmissoria di Laplace della scala $s \cdot 1/s$ è $s \cdot 1/s = 1/s$.
 Quindi:

$$C^0(s) = 1/s \cdot 1/s = 1/s^2$$

NB: Nei progetti statici non considero $\tilde{R}(s)$. Quindi $R(s) = \bar{R}(s) = \frac{1/r}{s g_R}$. Inoltre sempre nella stessa non considero nemmeno le costanti di tempo.

2) ERRORE DOWTO AL DISTURBO (su linea di andata)

$$E_{a,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} (s E_a(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \left(- \frac{F(s)}{1+R(s)G(s)} \right) \Delta_a(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \left(- \frac{5}{1+s \frac{1/r}{g_R}} \right) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(- \frac{5}{1+s \frac{1/r}{g_R}} \right) = - \frac{5}{1} = -5$$

Quindi l'errore complessivo è:

$$|E_{ss}| = |E_{ss}^0 + E_{a,ss}| \leq |E_{ss}^0| + |E_{a,ss}| = \begin{cases} \frac{15}{1+s \frac{1/r}{g_R}}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Simili al mio calcolo deve essere dato al disturbo si ha:

$$E_d(s) = F_d(s) D_d(s) \quad \text{e} \quad F_d(s) = \frac{-1}{1+L(s)} = \frac{-1}{1+R(s)G(s)}$$

↓

Ita:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(s \left(-F_d(s) D_d(s) \right) \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(s \left(\frac{-1}{1+L(s)} \right) D_d(s) \right)$$

$$D_d(s) = \pm \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \left(s \left(\frac{-1}{1+s \frac{K_R}{s} / s_{GR}} \right) \left(\frac{1}{s} \pm \right) \right) = \dots$$

Ne calcolo di local si è implicitamente assunto $\mu_R > 0$. Si noti che $\mu_R = 0$ va bene per noi in quanto esso deve essere minore di μ_{max} ma non necessariamente molto. Si ricordi che ogni incremento del tipo comporta un decremento di μ_R data μ_L . Questo comporta il progetto dinamico. Quindi:

$$\mu_R = 0 \Rightarrow |Z_{eff}| = \frac{15}{1+s \frac{K_R}{s}} = 0,025$$

$$\mu_R = \frac{15 - 0,025}{s \cdot 0,025} \approx \frac{15}{1,25} = 12$$

Siccome i disturbi sono interni, è meglio avere un margine di sicurezza circa μ_R , così per il modo di:

$$\mu_R \approx 20.$$

Quindi:

$$\begin{matrix} \mu_R = 0 \\ \mu_R = 20 \end{matrix} \Rightarrow \bar{R}(s) = 20$$

Vediamo ora il progetto dinamico. Simili a:

$$L(s) = \bar{R}(s) \tilde{R}(s) G(s)$$

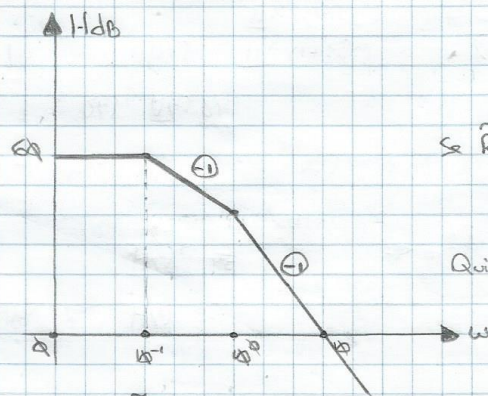
Separiamo i termini noti del progetto statico in modo da vedere cosa ci manca da realizzare:

$$L(s) = \tilde{R}(s) \cdot L^*(s)$$

dove:

$$L^*(s) = \bar{R}(s) G(s) = \frac{1000}{(1+0,1s)(1+s)}$$

Vediamo il diagramma di Bode di $L^*(s)$:



$$\mu = 1000$$

$$\text{Se } \tilde{R}(s) = 1 \Rightarrow \varphi_{pm} = 180^\circ - | -\arg(1000) - \arg(10) - \arg(1) | = -28^\circ$$

Quindi $\varphi_{pm} < 0 \Rightarrow$ sistema instabile.

$$\text{NB: } \varphi_{pm} = 180 - |\varphi_L|$$

Quindi il progetto di $\tilde{R}(s)$ deve essere tale che il diagramma del modulo di L attraversi l'asse 0 dB ad una pulsazione ω_{cru} con pendenza pari a -1, in modo da