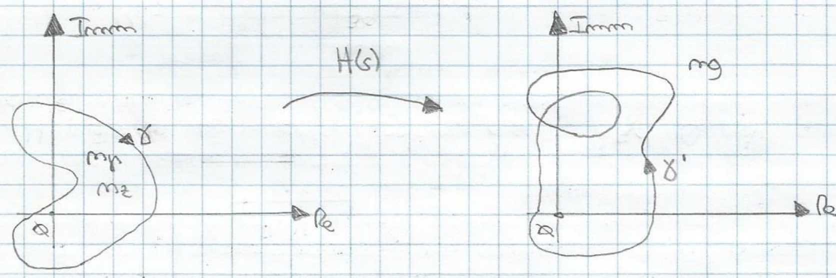
Dimostriamo ora il criterio usando il LEMMA DI CAUCHY. Si ricordi che una regione R del piano si dice SEMPLICEMENTE CONNESSA, se:

a) Presi due punti in R, esiste una linea interna in R che li congiunge.

b) Comunque si prenda due linee in R con estremi coincidenti, è possibile deformarle senza uscire da R.

Perciò sia R tale regione nel piano complesso, e sia γ la sua frontiera percorsa in senso orario. Sia poi H una funzione razionale della variabile complessa s, senza poli e zeri su γ, ma con n_p poli e n_z zeri in R. Sia poi n_g il numero di giri che l'immagine di γ attraverso H compie attorno all'origine.

$$n_g = n_p - n_z$$



LEMMA DI CAUCHY

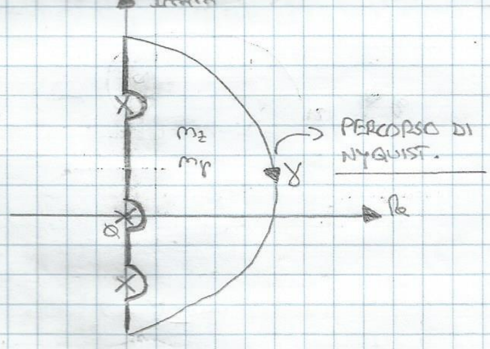
In questo caso $n_g = 1$. Quindi il numero di poli di H eccede il numero di zeri di 1.
Dimostriamo ora il criterio di Nyquist. Sia:

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{N(s)}{D(s)+N(s)}$$

la f.d.t di S. Sia inoltre:

$$H(s) = 1 + L(s) = \frac{D(s)+N(s)}{D(s)}$$

Come si può facilmente notare gli zeri di H coincidono con i poli di F, e i poli di H coincidono con i poli di L. Con la funzione H(s) così definita, e usando il lemma di Cauchy, prendiamo come regione R il semipiano destro $(Re > 0)$ privato dei semicerchi relativi ai poli di L o H sul semiasse immaginario positivo.



Si noti che l'immagine del percorso di Nyquist attraverso L coincide con il diagramma di Nyquist di L.

$$L(\bar{s}) = \overline{L(s)}, \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

dove $\bar{\ }$ sta per il complesso coniugato;

Si noti che l'immagine del percorso di Nyquist γ attraverso H con $H = 1+L$ non è che l'immagine di γ attraverso L vista dal punto -1.

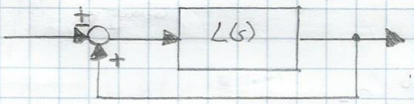
Poiché i poli di H coincidono con i poli di L, si ha che $m_p = P$. Inoltre se l'immagine del percorso di Nyquist attraverso L coincide con il diagramma di Nyquist di L, e l'immagine del percorso di Nyquist γ attraverso H con $H = 1+L$, è l'immagine di γ attraverso L vista da -1, si ha che:

$$\underline{m_g = N}$$

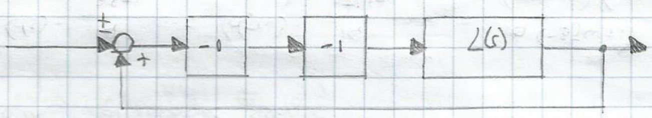
Quindi siccome $m_p = P$ e $m_g = N$ si ha che se il sistema S è asintoticamente stabile, tutti i poli di F e quindi tutti i zeri di H hanno parte reale negativa, pertanto $m_z = 0$ e:

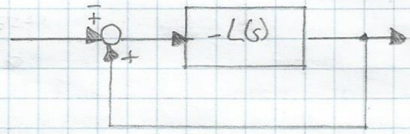
$$\underline{N = m_g = m_p - m_z = m_p = P}$$ (CONDIZIONE NECESSARIO)

Se $N = P$, allora $m_g = m_p$ e quindi $m_z = 0$. Questo significa che H non ha zeri con parte reale positiva. Inoltre H non ha neppure zeri con parte reale nulla perché altrimenti i zeri di H coinciderebbero con i poli di L e quindi N e D avrebbero fattori comuni contro l'ipotesi di stabilizzabilità di L, oppure $m_g \neq N$ contro le ipotesi iniziali. Supponiamo ora di avere la seguente situazione:

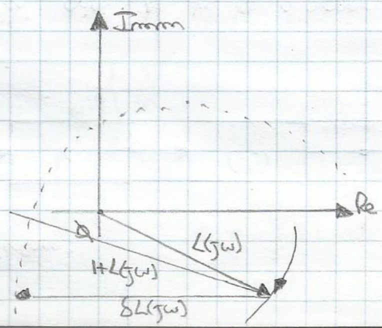


RETROAZIONE POSITIVA.





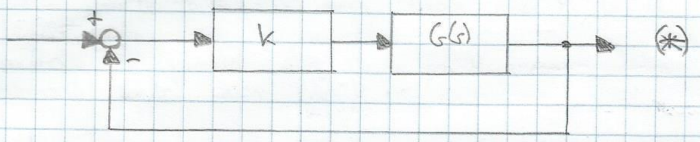
Il criterio di Nyquist non muta. Basta semplicemente sostituire -1 con 1 e il gioco è fatto. Quindi il diagramma di Nyquist di $-L$ compie attorno a -1 tot giri che coincidono con il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist attorno al punto 1. (di L). Il criterio di Nyquist consente anche la robusta stabilità di S rispetto a disturbi strutturali di L.



con $\delta L(j\omega)$ = DISTURBI.

Nel seguente caso particolare:

K = PARAMETRO INCERTO



$L(s) = KG(s)$. Il numero di giri N che il diagramma di Nyquist di L compie attorno al punto −1, è identico al numero di giri che il diagramma di Nyquist di G compie attorno al punto $-1/K$. Inoltre P coincide con il numero di poli di G nel semipiano destro. Quindi condizione necessaria e sufficiente perché il sistema * sia asintoticamente stabile in modo robusto, relativamente all'intervallo (a,b) di possibili valori di K è che il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist di G attorno al segmento $[-1/a, -1/b]$ sia uguale al numero di poli di G nel semipiano destro.
Facciamo qualche esempio:

1) Sia:

$$G(s) = \frac{10}{3s+1}$$

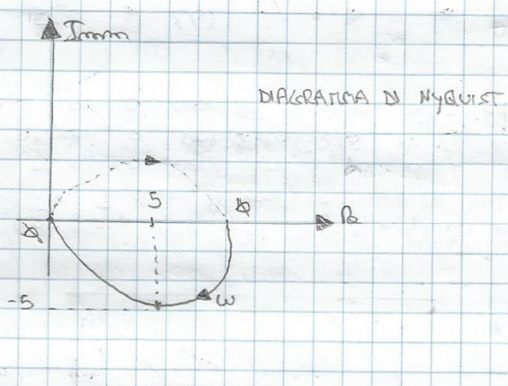
Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist, e verificare l'asintotica o meno stabilità del relativo sistema.

$$G(s) = \frac{10}{3s+1} = G(j\omega) = \frac{10}{3j\omega+1} = \frac{10(-3j\omega+1)}{(3j\omega+1)(-3j\omega+1)} = \frac{10(-3j\omega+1)}{9\omega^2+1} =$$

$$= \frac{10}{9\omega^2+1} - j\frac{30\omega}{9\omega^2+1} = Re(\omega) - j\,Imm(\omega)$$

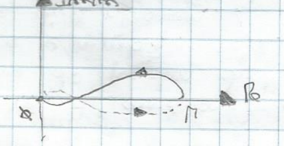
Quindi:

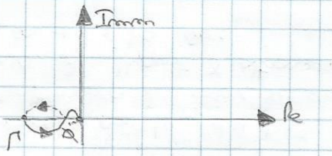
NB: $z = x + iy$



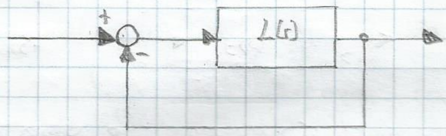
2) Sia: $G(s) = \frac{\mu}{(1-10s)(1+s)^2}$. Fare le stesse cose dell'esercizio precedente.

Si noti che $P=1$, e che se $\mu > 0 \Rightarrow N = 0$ mentre se $\mu < 0 \Rightarrow N \in (0, 1, -1)$.

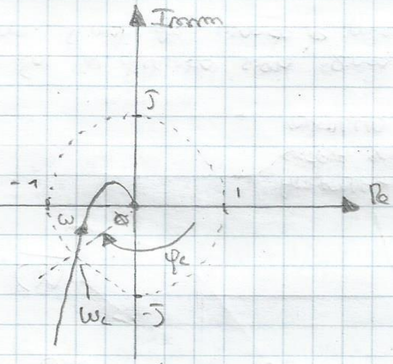




Consideriamo ora:



Ipotizziamo che $P=0$ (ipotesi basilare) e ipotizziamo anche che il diagramma polare della risposta in frequenza generalizzata d'anello tagli una sola volta la circonferenza unitaria con centro l'origine. (ipotesi accessoria)



Si chiama PULSAZIONE CRITICA che si indica con ω_c quel particolare valore di ω per cui la risposta in frequenza generalizzata d'anello taglia la circonferenza unitaria. Quindi:

$$|L(j\omega)|=1$$

Si chiama FASE CRITICA (SFASAMENTO CRITICO) che indichiamo φ_c l'argomento della risposta in frequenza nel punto di taglio con la circonferenza unitaria. Quindi:

$$\varphi_c = \angle^{\circ} L(j\omega_c)$$

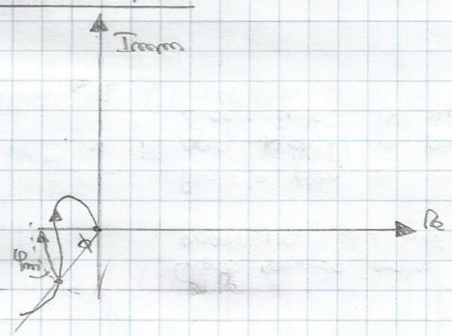
Si noti che se sono rispettate le condizioni viste che sono le CONDIZIONI DEL CRITERIO DI BODE, μ deve essere positivo (condizione necessaria). Infatti per $\mu<0$, $N\neq 0$ ma se $P=0$ si ha che:

$$P\neq N \Rightarrow \text{il sistema non è asintoticamente stabile.}$$

Si chiama MARGINE DI FASE e si indica con φ_m l'angolo minimo di cui bisogna ruotare il diagramma della risposta in frequenza perché passi per -1. Quindi:

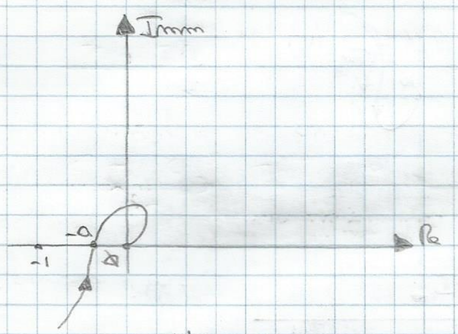
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$$

Graficamente si ha:



Il sistema S, sotto le ipotesi di Bode, è asintoticamente stabile se e solo se $\varphi_m>0$, e $\mu>0$.

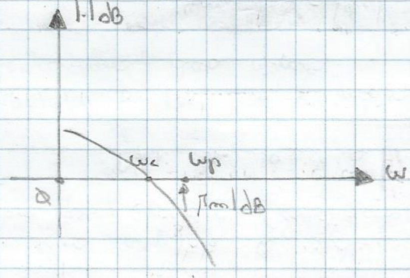
Il margine di fase viene visto come il grado di stabilità del sistema S. Può essere però conveniente usare un secondo indice di grado di stabilità.



Questo secondo indice viene detto MARGINE DI GUADAGNO ed è indicato con $\mu_m = 1/a > 1$.

Esso è il fattore che occorre applicare al guadagno μ di L, per fare sì che il corrispondente diagramma di Nyquist passi per -1.

Quindi



dove $\angle^\circ L(j\omega_\pi) = -180°$

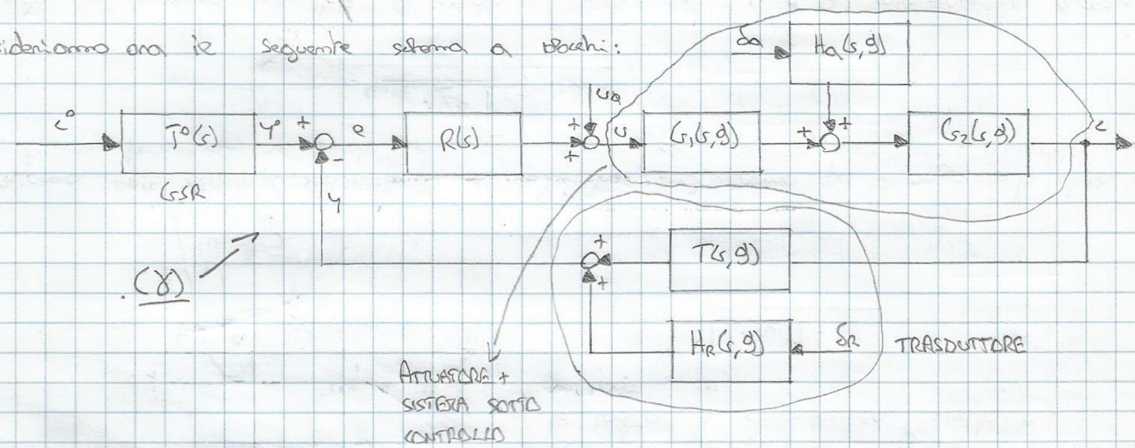
$\Downarrow$

$|\mu_m| = 0$

$|\varphi_c| = -180°$

Quindi $|\mu_m| = \angle^\circ L(j\omega_\pi)$

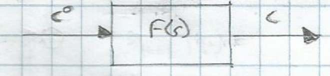
Consideriamo ora il seguente sistema a blocchi:



Chiamiamo δ_a il disturbo sulla linea di andata, e δ_R il disturbo sulla linea di retroazione. Si nota che usando il principio della sovrapposizione degli effetti si ha:

$$|e|_{MAX} = \sum_i |e_i|_{MAX}$$

dove i generici errori sono presenti a causa dei disturbi (sulla linea di andata e/o sulla linea di retroazione). Consideriamo lo schema equivalente:

S: 

Nell'analisi della precisione di un sistema di controllo monovariabile, LTI, bisogna distinguere tra due tipi di precisione:

1) PRECISIONE STATICA

2) PRECISIONE DINAMICA

Il primo tipo di precisione si ha quando il transitorio è esaurito, mentre nel secondo tipo di precisione si ha l'analisi dell'errore durante il transitorio. Si ipotizzi che il sistema da analizzare sia asintoticamente stabile, e che sia lineare. Quindi è possibile utilizzare la sovrapposizione degli effetti, e pensare all'errore come alla somma di tanti contributi quanti sono gli ingressi. La capacità di un sistema di controllo di far sì che il contributo all'errore dovuto al segnale di riferimento si mantenga sufficientemente piccolo si dice CAPACITÀ D'INSEGUIMENTO. Il concetto di BANDA PASSANTE è legato alla risposta in frequenza di un LTI. Essa è legata alla f.d.t $F(s)$ tra il valore c° e c. Poiché il valore nominale o guadagno nominale tra c° e c è l'identità, infatti:

$$\frac{c}{c^\circ} = 1 \Rightarrow c^\circ = c \quad \text{(IDEALITÀ)}$$

si sa che se $|F(j\omega)| \leq \sqrt{2}$, $\forall \omega \geq 0$ allora la banda passante BF del sistema S è:

$$BP = \left\{ \omega : |F(j\omega)| \geq 1/\sqrt{2} \right\}$$

Oppure data F_m il guadagno NOMINALE di S, cioè il valore del modulo della risposta in frequenza di S in corrispondenza di un valore ω_p di ω:

$$F_m = |F(j\omega_p)|$$

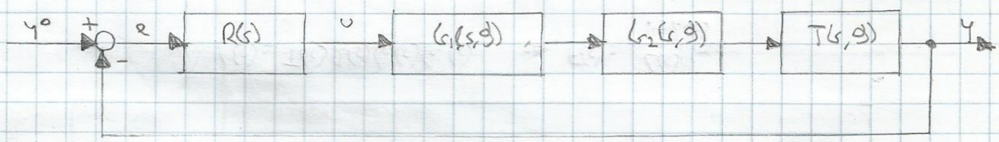
se:

$$|F(j\omega)| \leq \sqrt{2}\, F_m, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^+ \quad \rightarrow \text{CONDIZIONE PRELIMINARE}$$

$$\Downarrow$$

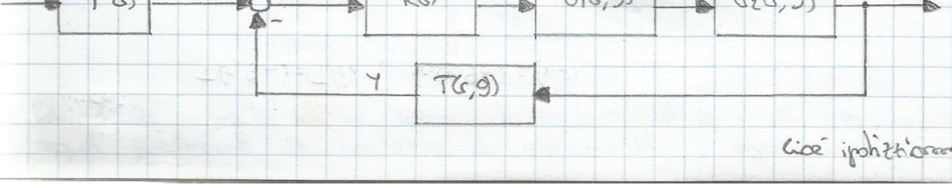
$$BP = \left\{ \omega : |F(j\omega)| \geq F_m/\sqrt{2} \right\}$$

Nel caso dei sistemi di controllo, siccome vogliamo che $c \equiv c^\circ \Rightarrow F_m = 1$. Sia:



$$F(s,\vartheta) = \frac{L(s,\vartheta)}{1+L(s,\vartheta)} \quad \text{con } L(s,\vartheta) = R(s)\cdot G_1(s,\vartheta)G_2(s,\vartheta)\cdot T(s,\vartheta)$$

Si noti che noi abbiamo, in generale:



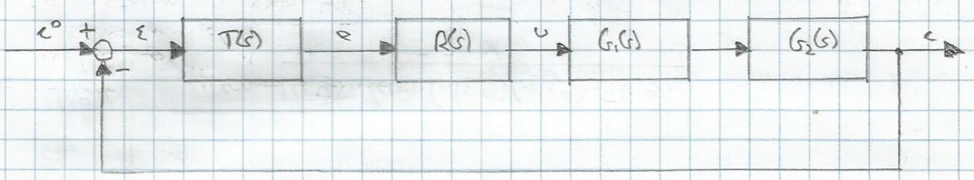
cioè ipotizziamo che $\vartheta = \vartheta_m \Rightarrow \delta\vartheta = 0$

Quindi:

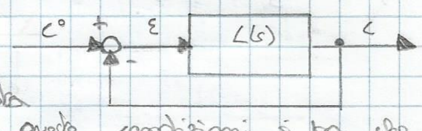
$$T(s, g_m) = T(s) \quad , \quad G_1(s, g_m) = G_1(s)$$

Inoltre: $T^\circ(s) = T(s)$

$\Downarrow$

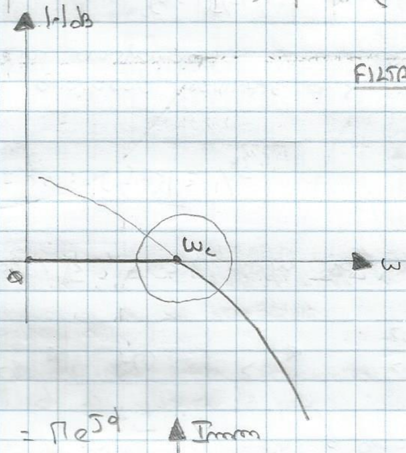


$$L(s) = T(s)R(s)G_1(s)G_2(s) \Rightarrow F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$



Questa cosa si ha in quanto il trasduttore non è affetto da disturbi strutturali e al GSR è assegnata una f.d.t uguale a quella del trasduttore. In queste condizioni si ha che la f.d.t da c° a c è equivalente alla f.d.t da y° a y. Si ha quindi:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & , \ \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & , \ \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$



FILTRO PASSA - BASSO

La banda passante è $[0, \omega_c]$.

Quindi per $\forall \omega < \omega_c$, il segnale verrebbe fedelmente replicato in uscita.

Ci chiediamo ora cosa succede nella zona critica $(|L(j\omega)| \cong 1)$.

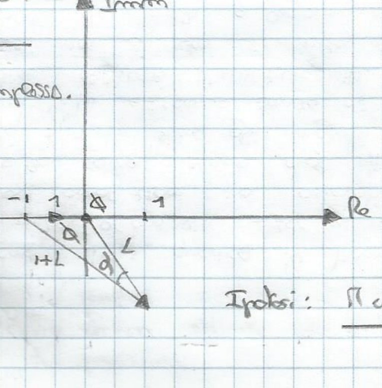
Sia: $F = \dfrac{L}{1+L} = \Pi e^{j\phi}$

NB: Sia z un numero complesso.

$z = x + iy$

si ha la sua forma esponenziale:

$z = \rho e^{j\varphi}$



$$\Pi = \underbrace{\frac{|L|}{|1+L|}}_{\text{Modulo}} \quad e \quad \phi = \underbrace{\angle L - \angle(1+L)}_{\text{Fase}}$$

Ipotesi: Π costante e anche ϕ costante.