

Si può inoltre dire che se un generico sistema è composto, cioè possiede più blocchi collegati in cascata, in parallelo, o in retroazione, le corrispondenti diagrammi di Bode gode delle seguenti proprietà:

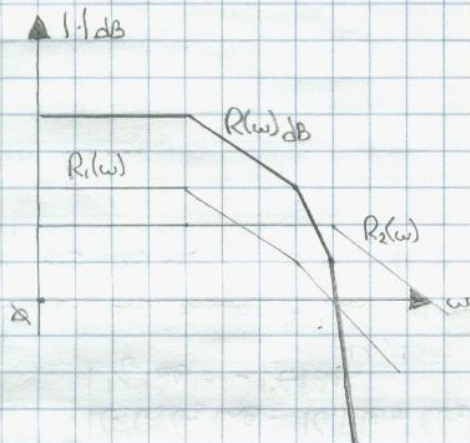
1) Se due blocchi di p.d.t. G_1 e G_2 sono in cascata, si ha:

$$R(\omega) = |G(\omega)| = |G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)| = |G_1(\omega)| \cdot |G_2(\omega)| = R_1(\omega) \cdot R_2(\omega)$$

Passando ora misura in decibel si ha:

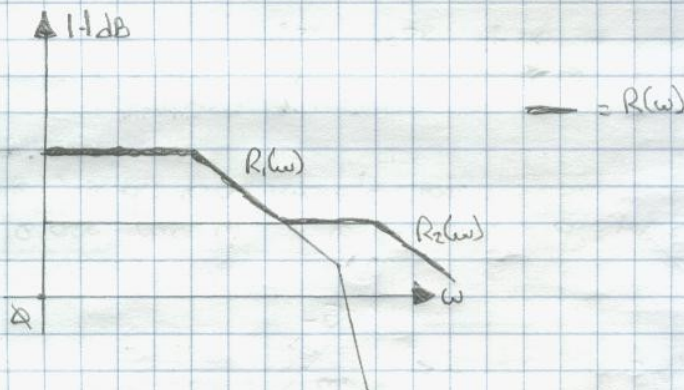
$$\begin{aligned} R(\omega) &= 20 \log_{10} (R_1(\omega) \cdot R_2(\omega)) = 20 \log_{10} R_1 + 20 \log_{10} R_2 = \\ &= \underline{R_1(\omega)_{dB} + R_2(\omega)_{dB}} \end{aligned}$$

Graficamente si ha:



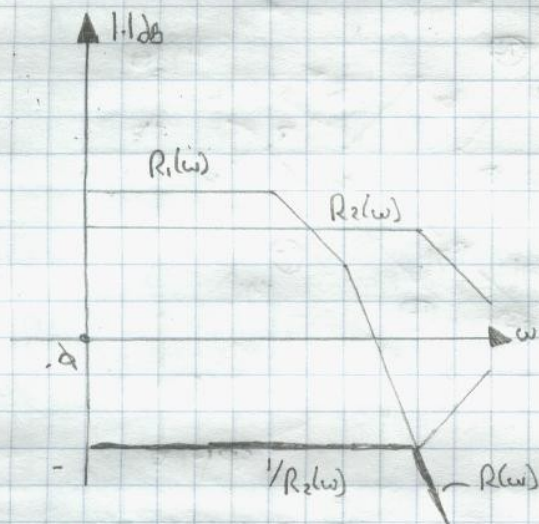
2) Se i due blocchi presi in considerazione sono in parallelo si ha:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= |G(\omega)| = |G_1(\omega) + G_2(\omega)| \\ &\downarrow \\ R(\omega) &\approx \max [R_1(\omega), R_2(\omega)] \end{aligned}$$



3) Nel caso in cui i due blocchi sono collegati in retroazione si ha:

$$R(\omega) = |G(\omega)| = \frac{|G_1(\omega)|}{|1 + G_1(\omega)G_2(\omega)|} \Rightarrow \underline{R(\omega) \approx \min [R_1(\omega), 1/R_2(\omega)]}$$



Facciamo qualche esempio:

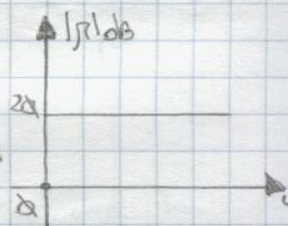
1) Tracciamo i diagrammi di Bode del modulo di:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

1) $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

con $\begin{cases} G_1(s) = 10 \\ G_2(s) = \frac{1}{(1+s)1s} \\ G_3(s) = \frac{1}{(1+0.1s)} \end{cases} \Rightarrow$

$G_1(s) = 10$
 $20 \log_{10} 10 = 20$



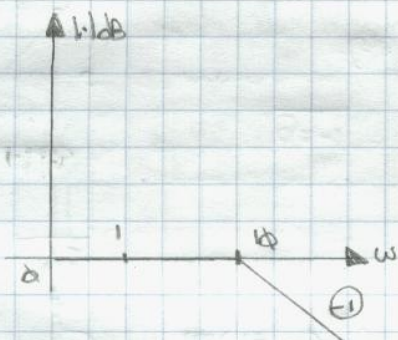
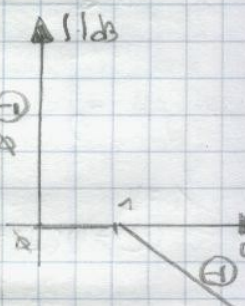
$G_3(s) = \frac{1}{(1+0.1s)}$

$\frac{1}{1s} = -10 \text{ dB} \quad (20 \text{ dB})$

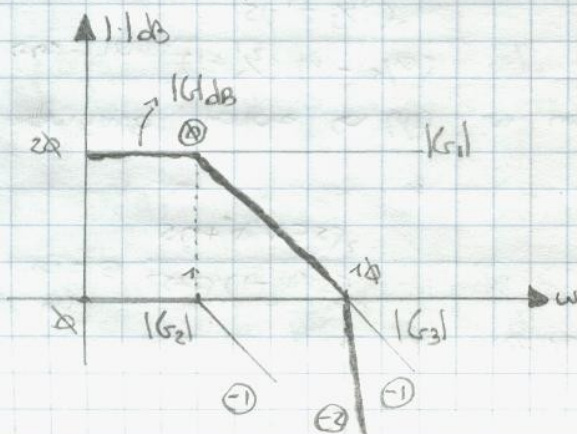
$G_2(s) = \frac{1}{(1+s)}$

$T=1 \Rightarrow w \geq 1 \rightarrow (-1)$
 $w < 1 \rightarrow 0$

$1 \text{ dB} \rightarrow (-1)$



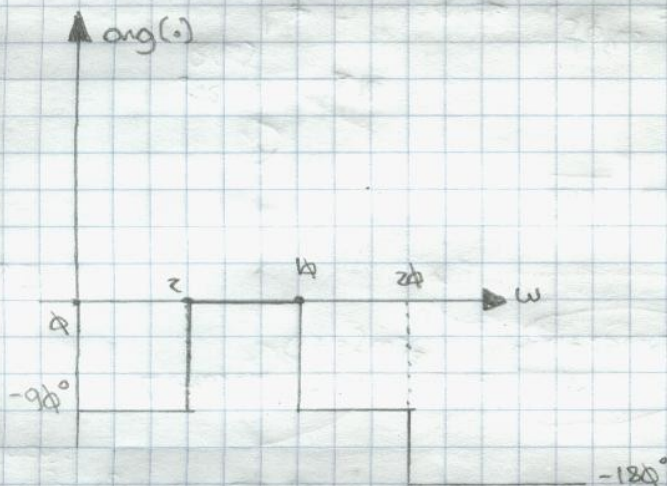
Quindi mettendo tutto insieme si ha:



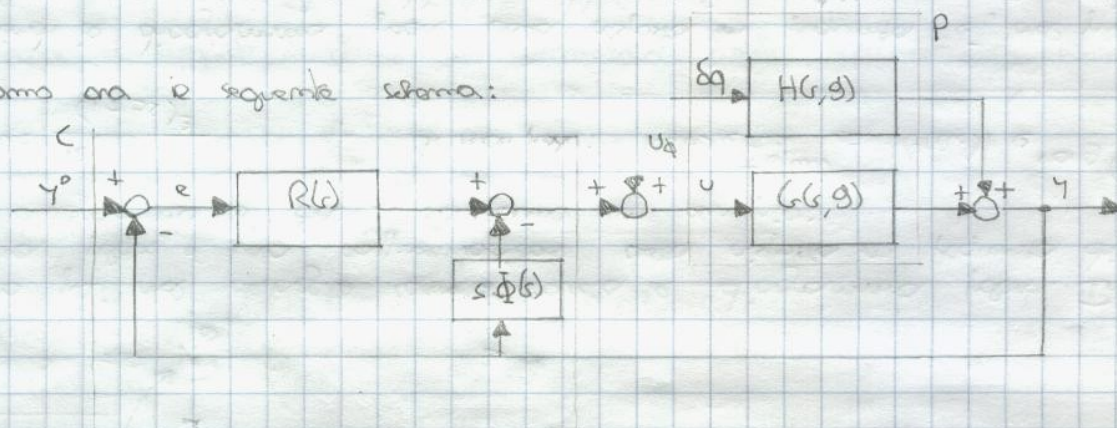
$$|G|_{dB} = |G_1|_{dB} + |G_2|_{dB} + |G_3|_{dB}$$

$$= |G|_{dB}$$

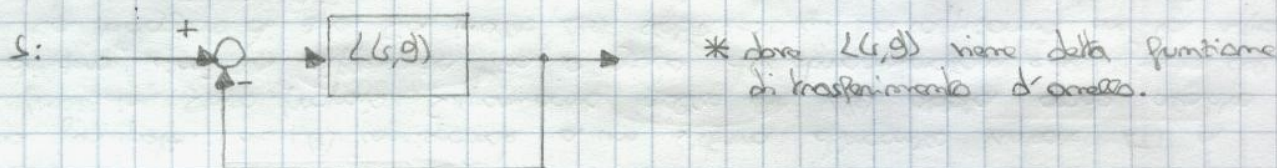
FASE:



Riconsideriamo ora il seguente schema:



Dato un modello lineare invariante, inserito nel sistema sotto controllo, una descrizione degli andamenti ammissibili delle variabili interne, e l'imprecisione massima tollerata, determinare $R(s)$ e $\phi(s)$ in modo che le specifiche siano soddisfatte in tutte le condizioni di funzionamento. Analizziamo innanzitutto lo schema precedente dal punto di vista della stabilità. Con pochi passaggi si giunge alla conclusione che il precedente schema è equivalente dal punto di vista della stabilità al seguente:



Si noti che:

$$L(s, s) = \frac{N(s, s)}{D(s, s)} \Rightarrow F(s, s) = \frac{L(s, s)}{1 + L(s, s)} = \frac{N(s, s)}{D(s, s) + N(s, s)}$$

Si noti anche che $L(s, s)$ corrisponde a un sistema dinamico in senso proprio. Il sistema S è asintoticamente stabile e anche robustamente se e solo se le radici dell'equazione:

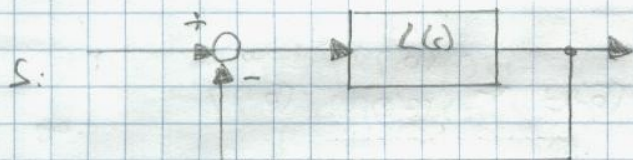
$$D(s, s) + N(s, s) = 0$$

hanno parte reale negativa, $\forall s \in \mathbb{C}$. Si noti come questi metodi "algebrici" non sono pienamente utilizzabili in un procedimento di sintesi in quanto non si può avere informazioni valide per le successive tentativi da un tentativo fallito. Inoltre non forniscono un grado di stabilità del sistema.

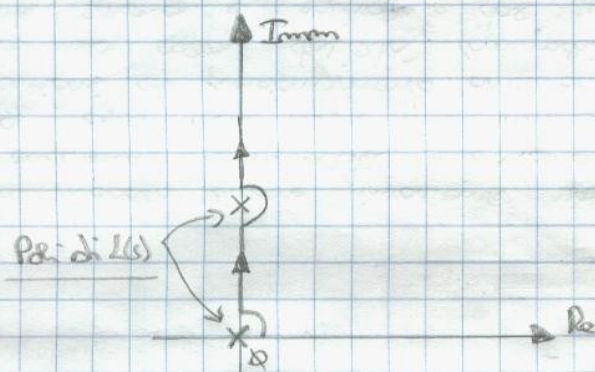
Sarebbe inoltre assai interessante avere un metodo che consentisse di valutare la stabilità data $F(s, g)$ in base a semplici proprietà di $L(s, g)$. Il CRITERIO DI NYQUIST consente ciò. Lo analizzeremo prima, nel caso in cui:

$$g(s) = a \Rightarrow g = g_m \text{ e } L(s, g_m) = L(s), \text{ cioè in mancanza di disturbi strutturali.}$$

e poi in presenza di incertezze.



Supponiamo per ipotesi che $L(s)$ corrisponda a un sistema dinamico lineare LTI, a dimensioni finite in senso proprio. Supponiamo inoltre che $L(s)$ abbia grado relativo maggiore di zero, cioè la differenza tra il grado del denominatore e il grado del numeratore sia maggiore di zero. Sia inoltre $L(s)$ stabilizzabile. Noi sappiamo che la risposta in frequenza dell'anello è l'immagine del semiasse immaginario positivo attraverso L .



* Il diagramma di Nyquist è una curva chiusa orientata ottenuta dal diagramma piano facendo la simmetria sull'asse reale, e cambiando verso di percorrenza.

La vediamo più nel dettaglio come si traccia il diagramma piano. Immaginabile il diagramma piano è una rappresentazione della risposta in frequenza di un sistema (come il diagramma di Bode). Facciamo un esempio:

$$1) \quad L(s) = \frac{12}{(1+5s)^3}$$

$$\text{Si noti che: } R(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))} = \underline{G(j\omega)}.$$

Quindi il diagramma piano della risposta in frequenza è, nel piano complesso, il luogo geometrico dei punti che soddisfano la relazione appena scritta.

Quindi:

$$L(j\omega) = \frac{12}{(1+5j\omega)^3} = \frac{12}{(1+25\omega^2)^{3/2}} \cdot e^{-j\arctg(5\omega)} \Rightarrow \underline{R(\omega)}$$

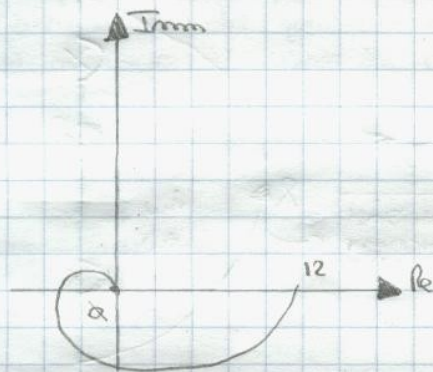
Imm

NB: Quando ω cresce $R(\omega)$ tende a zero.

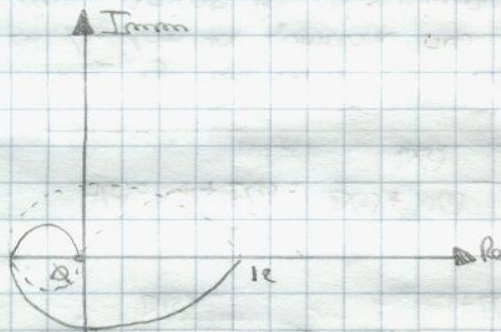
Re

$$\hookrightarrow j\varphi(\omega) = 0 \Rightarrow e^{j\varphi(\omega)} = 1 \quad (\text{per } \omega=0 \Rightarrow \underline{R(\omega)=12}).$$

Si noti che la linea del diagramma polare è orientata nel verso delle ω crescenti. Quindi:



Il diagramma di Nyquist si ottiene per simmetria rispetto all'asse reale. Quindi:



Sia N il numero di giri che il diagramma di Nyquist compie attorno al punto -1 , e sia P il numero di poli con parte reale maggiore di zero. (di L). Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema S è che:

$$P - N$$

Si noti che N può essere un numero negativo, mentre P no. Quindi se N è negativo, il sistema non è asintoticamente stabile. Esempio:

1) Sia:

$$L(s) = \frac{3s}{(2s+1)^2 (s,5s+1) (s,1s+1)}$$

$L(s)$ non ha poli con parte reale positiva e quindi $P=0$. Osservando il suo diagramma di Nyquist (da fare con MATLAB), si ha che $N=-2$. Quindi:

$N \neq P \Rightarrow$ sistema non è asintoticamente stabile.

2) Sia:

$$L(s) = \frac{3s(Ts+1)}{(2s+1)^2 (s,5s+1) (s,1s+1)}, \quad T \neq 0$$

$L(s)$ non ha poli con parte reale maggiore di 0. Quindi $P=0$. Inoltre, $N=0$, e quindi il sistema è asintoticamente stabile.