

La rappresentazione di Bode della risposta in frequenza consiste in realtà di due diagrammi:

- 1) DIAGRAMMA DEL MODULO
- 2) DIAGRAMMA DELLA FASE

Riprendiamo in esame la seguente forma di $G(s)$:

$$G(s) = \frac{|M|}{s^g} \cdot \frac{\prod_n |sT_n + 1|}{\prod_k |sT_k + 1|} \cdot \frac{\prod_i \left| \frac{s^2}{\omega_{mi}^2} + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{mi}} + 1 \right|}{\prod_r \left| \frac{s^2}{\omega_{mr}^2} + 2\zeta_r \frac{s}{\omega_{mr}} + 1 \right|}$$

$$G(j\omega) = \frac{\prod_n |j\omega T_n + 1|}{\prod_k |j\omega T_k + 1|} \cdot \frac{\prod_i \left| \frac{-\omega^2}{\omega_{mi}^2} + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{mi}} + 1 \right|}{\prod_r \left| \frac{-\omega^2}{\omega_{mr}^2} + 2\zeta_r \frac{j\omega}{\omega_{mr}} + 1 \right|} \cdot \frac{|M|}{\omega^g}$$

Qui ho sostituito s con $j\omega$. Bisogna ricordarsi che:



Quindi:

$$|G(j\omega)|_{dB} = |M|_{dB} - g \cdot 20 \log_{10}(\omega) + \sum_n |j\omega T_n + 1|_{dB} - \sum_k |j\omega T_k + 1|_{dB} +$$

$$+ \sum_i \left| \frac{-\omega^2}{\omega_{mi}^2} + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{mi}} + 1 \right|_{dB} - \sum_r \left| \frac{-\omega^2}{\omega_{mr}^2} + 2\zeta_r \frac{j\omega}{\omega_{mr}} + 1 \right|_{dB}$$

$$\angle^\circ G(j\omega) = \angle^\circ M - g \cdot 90^\circ + \sum_n \angle^\circ (j\omega T_n + 1) - \sum_k \angle^\circ (j\omega T_k + 1) + \sum_i \angle^\circ \left(\frac{-\omega^2}{\omega_{mi}^2} + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{mi}} + 1 \right) - \sum_r \angle^\circ \left(\frac{-\omega^2}{\omega_{mr}^2} + 2\zeta_r \frac{j\omega}{\omega_{mr}} + 1 \right)$$

Simili che $\angle^\circ =$ fase (argomento). Per convenzione si ha:

$$\angle^\circ p = \begin{cases} 0, & p \geq 0 \\ -180^\circ, & p < 0 \end{cases}$$

$$\angle^\circ (j\omega T + 1) = \arctg(\omega T) \cdot 180^\circ / \pi$$

$$\angle^\circ \left(\frac{-\omega^2}{\omega_m^2} + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_m} + 1 \right) = \begin{cases} \arctg \left(\frac{2\zeta \omega \omega_m}{\omega_m^2 - \omega^2} \right) \cdot 180^\circ / \pi, & \omega_m > \omega \\ 90^\circ \cdot \text{sign}(\zeta), & \omega_m = \omega \\ \arctg \left(\frac{2\zeta \omega \omega_m}{\omega_m^2 - \omega^2} \right) \cdot 180^\circ / \pi + 180^\circ \cdot \text{sign}(\zeta), & \omega_m < \omega \end{cases}$$

Una rete nei diagrammi di:

$$\begin{cases} G_A(s) = 1/s^2 \\ G_B(s) = sT + 1 \\ G_C(s) = \frac{s^2}{\omega_m^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_m} + 1 \end{cases}$$

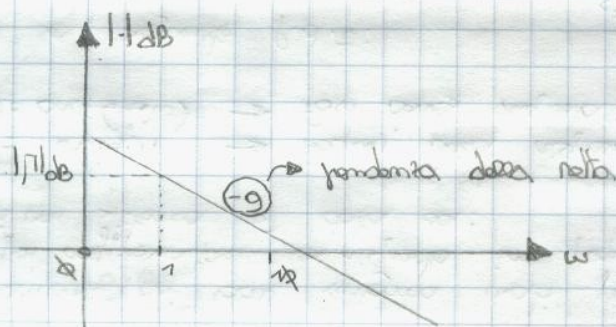
la rete è barbara.

Si ricorre a:

$$\begin{cases} |G_A(j\omega)|_{dB} = |1/s^2|_{dB} = -9 \log_{10}(\omega) & , \quad \angle^\circ G_A(j\omega) = \angle^\circ 1 - 90^\circ \\ |G_B(j\omega)|_{dB} = |j\omega T + 1|_{dB} & , \quad \angle^\circ G_B(j\omega) = \angle^\circ (j\omega T + 1) \\ |G_C(j\omega)|_{dB} = \left| -\frac{\omega^2}{\omega_m^2} + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_m} + 1 \right|_{dB} & , \quad \angle^\circ G_C(j\omega) = \angle^\circ \left(-\frac{\omega^2}{\omega_m^2} + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_m} + 1 \right) \end{cases}$$

Indichiamo più in dettaglio questi diagrammi:

a) consideriamo: $|G_A(j\omega)| = |1/s^2| = 1/\omega^2$ $\Rightarrow \begin{cases} 1/1_{dB} & , \omega=1 \\ 1/1_{dB} - 9 \log_{10}(\omega) & , \omega=\omega \end{cases}$



b) $|G_B(j\omega)|_{dB} = |1 + sT|_{dB} = |1 + j\omega T|_{dB} \Rightarrow \bar{\omega} = 1/T = \text{PULSAZIONE D'ANGOLO}$

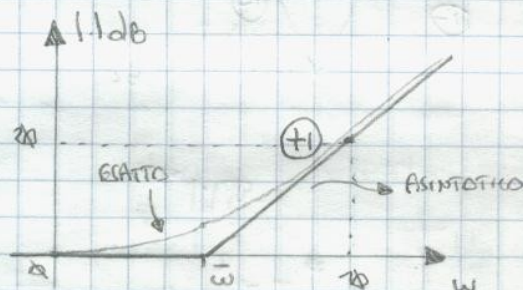
NB: $|G_B(j\omega)| = \begin{cases} 1 & , \omega \ll \bar{\omega} \\ 20 \log_{10}(\frac{\omega}{\bar{\omega}}) & , \omega \gg \bar{\omega} \end{cases}$

NB: $|G_B(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |1 + j\omega T|$

NB: $|1 + sT| = |1 + j\omega T| = |1 + j \frac{\omega}{\bar{\omega}}|_{dB}$

Si noti che:

$$20 \log_{10}(\frac{\omega}{\bar{\omega}}) = 20 (\log_{10} \omega - \log_{10} \bar{\omega}) = \begin{cases} 0 & , \omega = \bar{\omega} \\ 20 & , \omega = \bar{\omega} 10 \end{cases}$$



Scostamento massimo: $\frac{3}{4} \text{dB}$ (4%)

Il caso c) è una conseguenza. Facciamo qualche esempio:

1) $G(s) = \frac{\omega_s}{(\omega_s s + 1)^2}$

Si noti subito che di fronte ad una p.d.t. bisogna sempre, come primo passo, verificare se è scritta già nella forma:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \frac{T_h(1 + sT_h)}{T_k(1 + sT_k)}$$

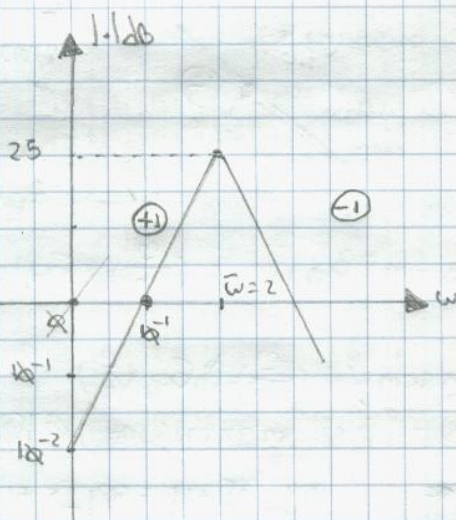
Dato $G(s)$ si vede subito che:

$$G(s) = \frac{10s}{(s+1)^2} \rightarrow p_1 = -1, \quad g = -1, \quad \bar{\omega} = 2, \quad \text{multiplicità } 2.$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{|T|} \text{ con } |T| = 0,5$$

Impatti:

$$G(s) = 10 \frac{s}{(s+1)^2} \quad \times \quad 10 \cdot s = \frac{10}{s^{-1}}$$



Riassumendo i diagrammi di Bode vengono usati per calcolare la risposta in frequenza, o meglio per rappresentare la risposta in frequenza di un sistema. La risposta in frequenza di un sistema è data da:

$$\begin{cases} |R(w)| = |G(jw)| & \rightarrow \text{Modulo della risposta in frequenza;} \\ \phi(w) = \arg G(jw) & \rightarrow \text{Fase della risposta in frequenza;} \end{cases}$$

Prendiamo in esame la seguente p.d.t.:

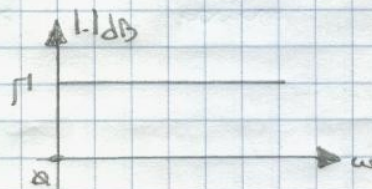
$$G(s) = \frac{\prod_k (1+sT_k)}{s^g \prod_j (1+sT_j)} \cdot \frac{\prod_r (1+2\frac{\zeta_r}{\omega_{nr}}s + \frac{s^2}{\omega_{nr}^2})}{\prod_m (1+2\frac{\zeta_m}{\omega_{mm}}s + \frac{s^2}{\omega_{mm}^2})}$$

Come si può facilmente notare, ha 4 fattori:

- 1) k
- 2) s^g
- 3) $1+sT$
- 4) $1+2\frac{\zeta}{\omega_m}s + \frac{s^2}{\omega_m^2}$

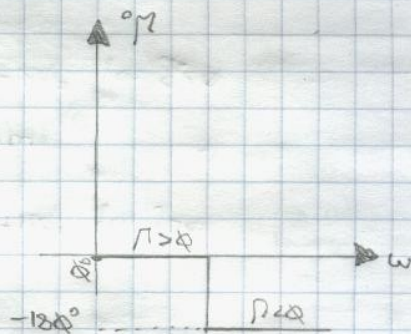
Studiamo questi quattro fattori separatamente:

1) $k = costante \rightarrow |k|_{dB} = 20 \log_{10} k$



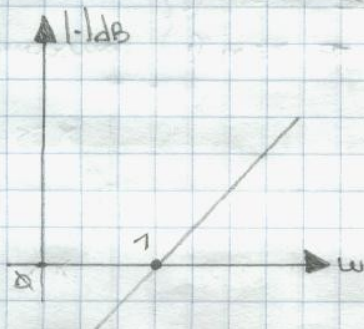
$$\text{Ang } 1 = \begin{cases} \phi & \text{se } \pi > \phi \\ -180^\circ & \text{se } \pi < \phi \end{cases}$$

NB: π viene detto GUADAGNO.



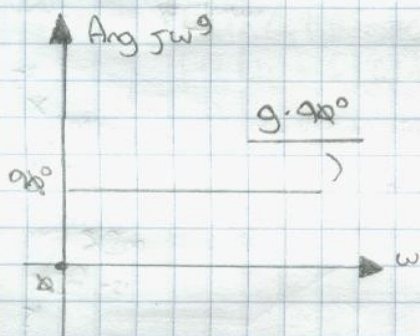
2) $s^g = j\omega^g = 20 \log_{10} |\omega^g| = 20g \log_{10} \omega$ con $w > 0$.

Modulo:

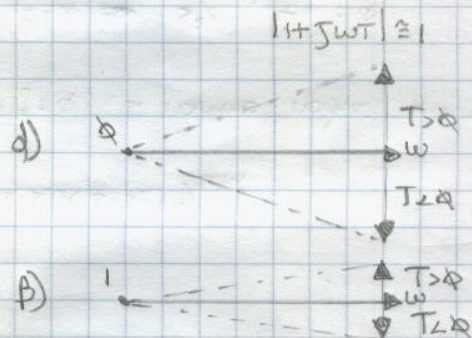
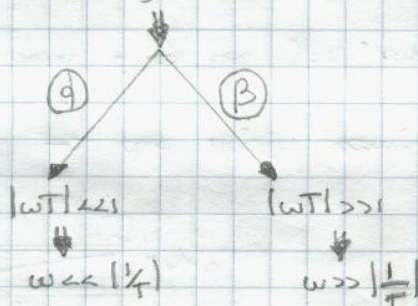


per $w=1 \Rightarrow |j\omega^g|=1$
per $w=10 \Rightarrow$ retta di pendenza $20g$ dB/decade

FASE:



3) $1+sT \Rightarrow 1+j\omega T \Rightarrow |1+j\omega T|$



Quindi:

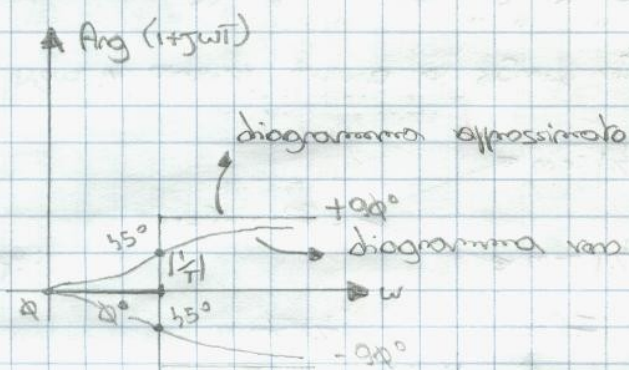
$$|1+j\omega T|_{dB} = \begin{cases} w < 1/T \Rightarrow 20 \log_{10} 1 = 0 \\ w > 1/T \Rightarrow 20 \log_{10} |wT| \end{cases} \quad |1+j\omega T| \approx |wT|$$

NB: Dora in avanti preme la seguente approssimazione:

">" e "<" con ">" e "<"

La retta di pendenza $(+20 \text{ dB/dec.})$ che passa
e' a 0 dB per $w=1/T$.

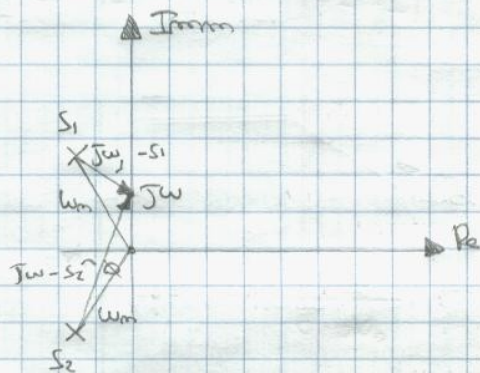
FASE:



NB: Qui si vuole la commutazione tra i due grafici è più significativa.

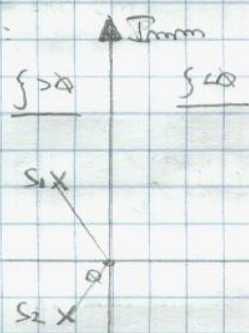
b) $1 + 2 \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \rightarrow$ due radici complesse. $(s-s_1)(s-s_2) \frac{1}{\omega_n^2}$

Per s_1, s_2 reali e coincidenti si ha che $\zeta=1$, mentre per $\zeta < 1$, si hanno radici immaginarie pure. Quindi:



NB: $\zeta < 1 \Rightarrow \frac{s^2}{\omega_n^2} + 1 = 0$
 $\Downarrow$
 $\Delta = 1 - \frac{4}{\omega_n^2}$

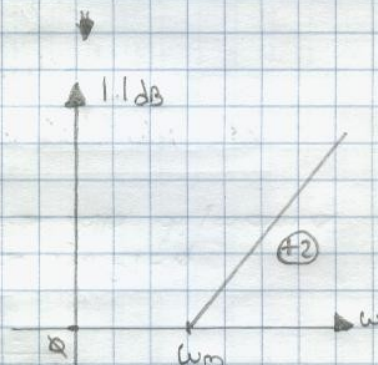
Si noti che per:



ω_n è la distanza delle radici dall'origine.

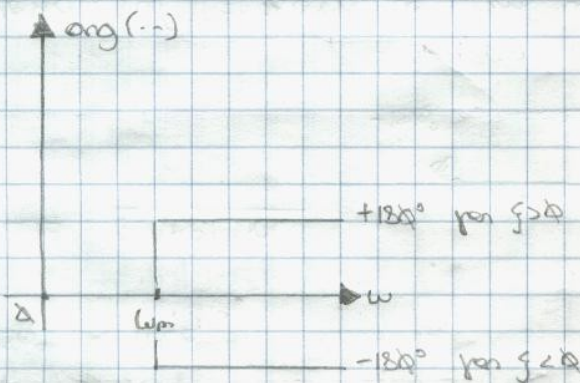
Se:

$j\omega - s_1$ o $j\omega - s_2 = \omega_n \Rightarrow \omega \geq \omega_n$



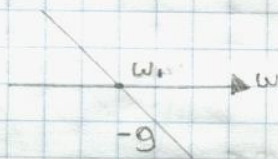
FASE:

Approssimazione: $\begin{cases} 1) \omega \geq \omega_n \Rightarrow \omega > \omega_n \\ 2) \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \omega > \omega_n \end{cases}$



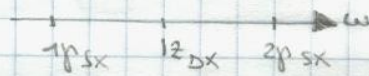
Simili che per tracciare il diagramma di Bode del modulo si ha:

$$\bullet \left| \frac{M}{s_0} \right| = 1 \Rightarrow \omega_0 = |p| \Rightarrow \omega_1 = |p|^{1/9}$$



La retta ha pendenza -9 , e l'asse 0 dB in $\omega_1 = |p|^{1/9}$

- Si segnano su l'asse delle ω , le frequenze di poli e zeri, il segno della loro parte reale, e la loro molteplicità.



dove con $p = \text{polo}$ e con $z = \text{zero}$. Inoltre:
Si ricordano anche che:

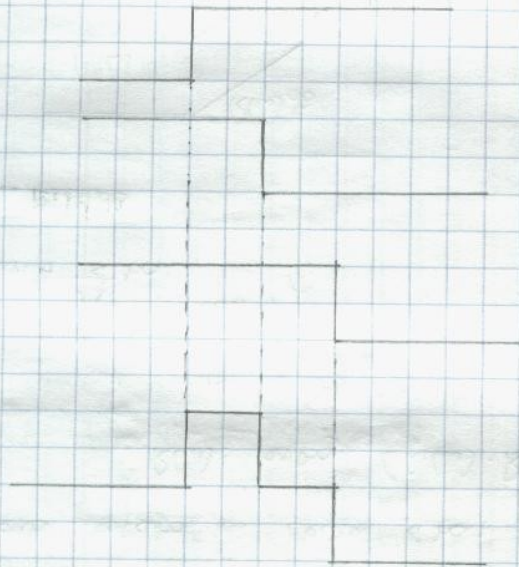
$$\begin{cases} 1 \text{ POLO: pendenza decresce di } -1 \\ 1 \text{ ZERO: pendenza cresce di } 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1p_{sx} = 1 \text{ polo sul semipiano sinistro} \\ 1z_{dx} = 1 \text{ zero sul semipiano destro} \\ 2p_{sx} = 2 \text{ poli sul semipiano sinistro} \end{cases}$$

Si ricordano anche che:

$$\begin{aligned} |G_1 G_2 G_3|_{dB} &= |G_1|_{dB} + |G_2|_{dB} + |G_3|_{dB} \\ |1/G|_{dB} &= -|G|_{dB} \end{aligned}$$

Il diagramma della fase invece è un diagramma a scalino. Simili che si ha una situazione del seguente tipo:



→ FASE SORITA.

Ad ogni frequenza d'angolo c'è una scala. Si ricordano la seguente tabella:

	POLO	ZERO
SX	-90°	$+90^\circ$
DX	$+90^\circ$	-90°

Si può anche ottenere con molteplicità.