

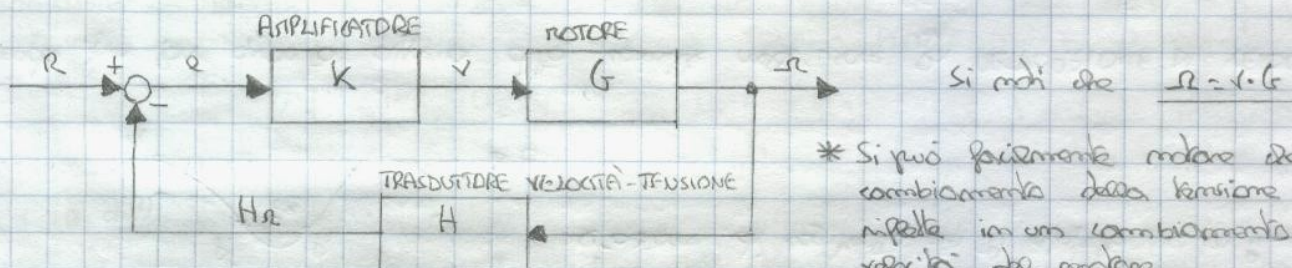
Esistono sostanzialmente due tipi di controllori:

- 1) "LINEARI" di tipo PID
- 2) non lineari a commutazione

Analizziamo il primo tipo di controllori. I controllori di tipo PID (ad azione Proporzionale + Integrativa + Derivativa) sono dei controllori regolati dalla seguente equazione:

$$v(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de}{dt}(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de}{dt}(t) \right]$$

dove  $k_p, k_i, k_d$  sono rispettivamente i coefficienti DELL'AZIONE PROPORZIONALE, INTEGRALE, DERIVATIVA.  $T_i$  e  $T_d$  vengono detti rispettivamente TEMPO INTEGRALE e TEMPO DERIVATIVO. Prendiamo in esame il controllo della velocità di un motore. Prendiamo in esame il seguente schema a blocchi:



\* Si può facilmente notare che un cambiamento della tensione si riflette in un cambiamento della velocità del motore.

Se il motore ha raggiunto una velocità di regime, cioè se la velocità ha raggiunto un valore costante, corrispondente a una certa tensione, si ha:

$$G = \frac{\text{uscita a regime}}{\text{ingresso a regime}} = \frac{r_A}{v_A}$$

Analogamente per quanto riguarda il trasduttore si ha: TENSIONE DI USCITA =  $H \cdot r$ . Analizziamo il comportamento dello schema a blocchi. La tensione di uscita del trasduttore viene confrontata con la tensione di riferimento R che rappresenta la velocità desiderata del motore. La differenza di questi due segnali rappresenta l'errore che va in ingresso all'amplificatore. Esso, tramite K, determina la tensione da applicare al motore. Quindi se la tensione è troppo bassa, la tensione viene aumentata, e viceversa. Il tipo più comune di controllo ad anello chiuso è il CONTROLLORE PROPORZIONALE (P), dove la p.d.t. (in questo caso K) è pilotata dall'errore. Esso quindi ha:

$$v(t) = K e(t) \quad \text{dove } K \equiv k_p$$

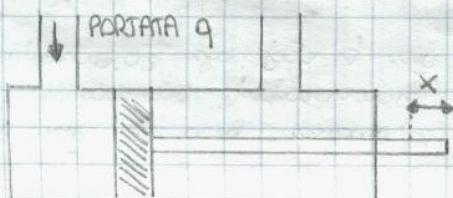
Si noti che:

$$e(t) = R - H v(t), \quad v(t) = K e(t) \quad \text{visto che } r(t) = v(t) \text{ e } v(t) = K e(t)$$

Quindi:

$$r = K e (R - H r) = K (R - K H r) \Rightarrow e(1 + K H) = K R \quad \text{ovvero } r = \frac{K R}{1 + K H}$$

dove  $K/(1 + K H)$  prende il nome di GUADAGNO AD ANELLO CHIUSO. Il termine  $K$  è detto GUADAGNO DELLA LINEA DI ANDATA mentre  $(1 + K H)$  viene detto GUADAGNO DI ANELLO. Prendiamo ora in esame un esempio idraulico usato nei sistemi di controllo di posizione.



{ Ingresso: portata di fluido  
Uscita: spostamento pistone

SPOSTAMENTO X

Orientamento se l'ingresso è costante, l'uscita continua a crescere, e analogamente se l'ingresso è nullo, l'uscita rimane costante. Come si può notare, in condizioni ideali, la velocità del pistone è direttamente proporzionale alla portata di fluido nel cilindro. Quindi l'equazione differenziale che lega  $q$  con  $x$  è la seguente:

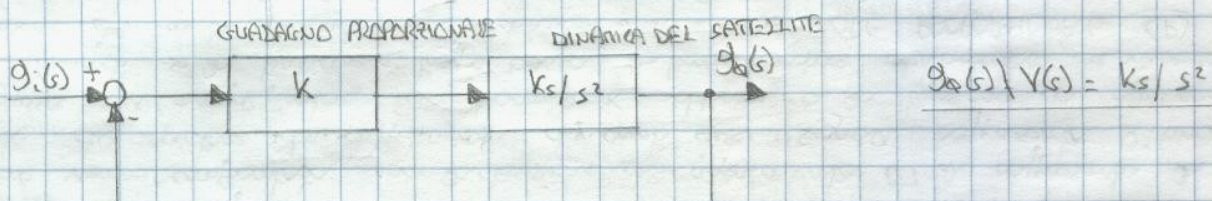
$$\frac{dx}{dt} = Kq \quad \text{dove } K \text{ dipende dalla sezione trasversale del cilindro}$$

Supposto  $t=0 \Rightarrow x=0$ , si ha:  $x = K \int_0^t q dt \Rightarrow$  MODELLO INTEGRATORE.

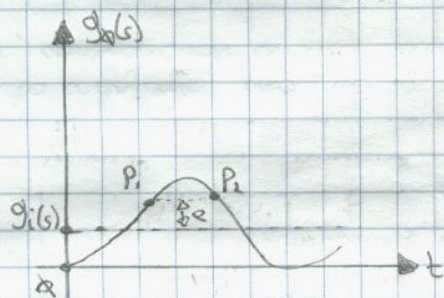
Imbocco e uscita del sistema è proporzionale all'integrale nel tempo dell'ingresso. E' quindi che:

$$\begin{array}{c} e(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow v(t) \end{array} \quad v(t) = K \int_0^t e(t) dt \quad \text{dove } K \equiv K_I$$

Consideriamo ora come esempio un satellite che ruota attorno alla terra. Supponiamo che esso sia puntato verso la terra, con angolo a regime, minimo o nullo. Il seguente sistema mostra il controllo di un satellite.

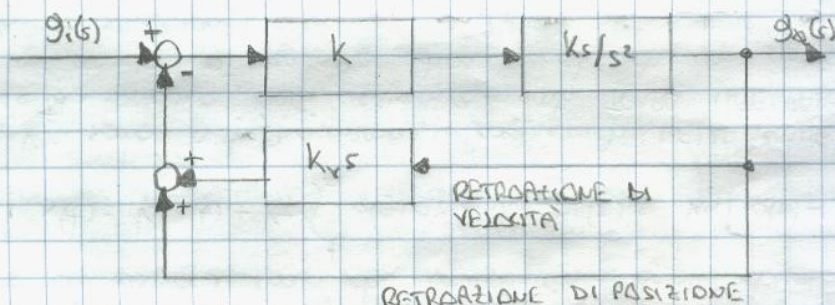


dove  $\theta_o(s)$  è l'angolo di orientamento,  $V$  è la tensione di posizionamento,  $K_s$  una costante che dipende dalle caratteristiche del satellite. Si noti che a causa dell'azione proporzionale del controllore, nei punti  $P_1$  e  $P_2$  l'angolo è lo stesso.

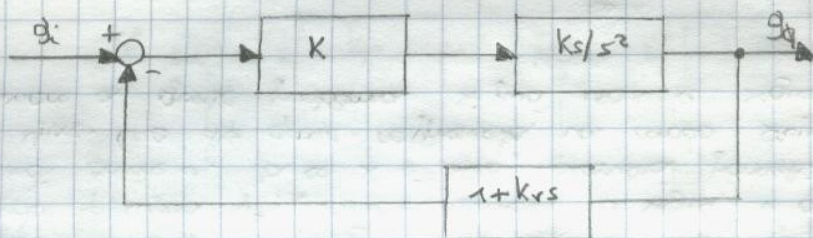


In  $P_2$  però il satellite si muove verso la posizione relativa. Sembra ovvio quindi ridurre l'azione di controllo in  $P_2$  rispetto che in  $P_1$ .

Un modo per fare quanto appena detto consiste nell'usare la RETROAZIONE DI VELOCITA'.



Quindi se sono in  $P_1$ , la velocità e la posizione sono entrambe maggiori di zero, e quindi l'azione di controllo aumenta. Invece se siamo in  $P_2$  la velocità è negativa, e quindi l'azione di controllo diminuisce. Si può ridisegnare il tutto in questo modo:



Quindi:  $k(Ks/s^2)(1+Krs)$

E' possibile ottenere gli stessi effetti con un'azione derivativa nel controllare stesso. Quindi si ha:

$$u(t) = k(e(t) + T_d \frac{de}{dt})$$

I controllori PID reali, in genere, hanno un comportamento non lineare. Noi sappiamo che le variabili di ingresso e di uscita sono limitate. Indicando con  $y$  e  $U$  l'ampiezza degli intervalli ammissibili di  $y$  e  $u$ , si chiama BANDA PROPORZIONALE il rapporto:

$$BP = \frac{\Delta y/y}{\Delta u/U} = \frac{U}{y} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{U}{y} \cdot \frac{1}{K_p} [\%] \quad (\text{ad azioni integrate e derivate escluse}).$$

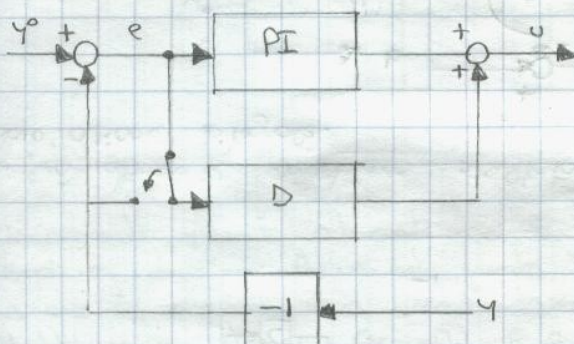
Se  $U=y$  la banda proporzionale altro non è che l'inverso della costante di proporzionalità  $K_p$  espressa in percentuale. Analizziamo ora più nel dettaglio l'azione derivativa. Essa viene realizzata in commercio con un filtro PASSA-BASSO del 1° ordine:

$$K_p s T_d \rightarrow K_p \frac{s T_d}{1 + s T_d / N} \quad \text{con } N = 3 \div 30$$

Questo fa sì che una brusca variazione della variabile di riferimento non comporti una variazione impulsiva della variabile di controllo. Ricordandosi che:

$$R_{PD}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right] = K_p \frac{(1 + s T_I)(1 + s T_D)}{s}$$

visto che  $K_I = \frac{1}{T_I}$  e  $K_D = T_D$ , e quindi si possono evitare brusche variazioni di  $u$ , escludendo le rifiniture dell'azione derivativa ponendo quest'ultima su  $y$  anziché su  $e$ .  
Quindi:

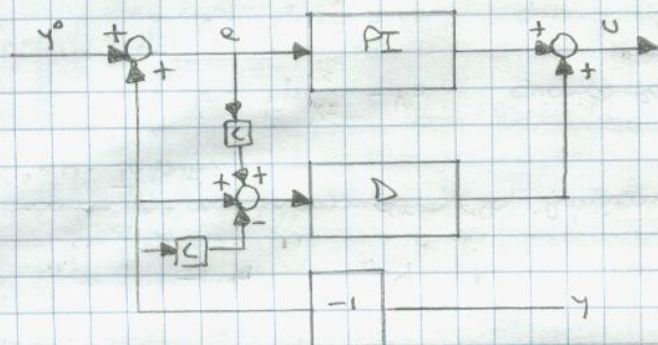


SCHEMA A DERIVAZIONE DI USCITA

Tale configurazione non altera la funzione di trasferimento tra  $y$  e  $u$  ma altera quella tra  $y^0$  e  $u$ . Infatti:

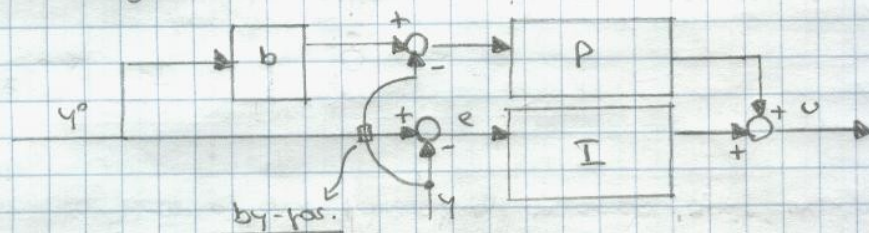
- $G = K_p \frac{K_I}{s} + K_D$  quando lo "switch" è su  $e$ .
  - $G = K_p \frac{K_I}{s} + K_D$  quando lo "switch" è su  $y$ .
- Da:
- $G_0 = K_p \frac{K_I}{s} + K_D$  (1° caso)
  - $G_0 = \varnothing$  (2° caso)

Possiamo ottenere una commutazione graduale utilizzando il seguente sistema:



AZIONE DERIVATIVA A RIFERIMENTO PESATO

Si può ottenere il medesimo risultato escludendo parzialmente il riferimento anche dall'azione integrale.



AZIONE PROPORZIONALE A RIFERIMENTO PESATO.

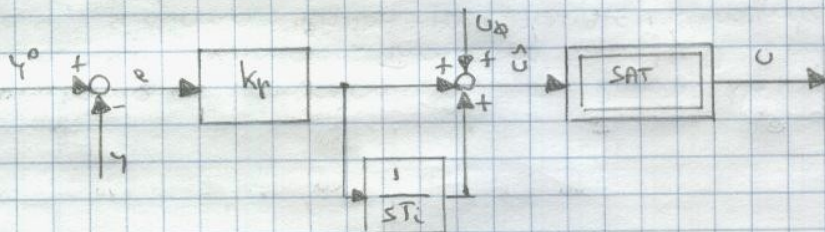
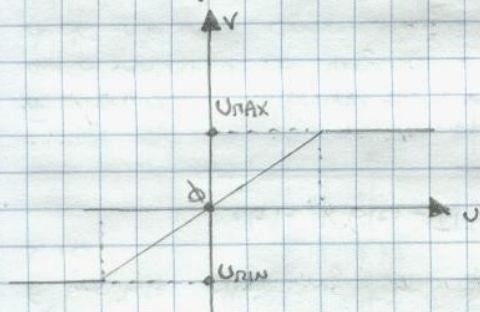
Come si può facilmente notare la p.d.t tra  $y$  e  $u$  è sempre la stessa, cioè:

$$-(k_p + \frac{k_p}{sT_i}) = -\frac{k_p}{T_i} \frac{1+sT_i}{s}$$

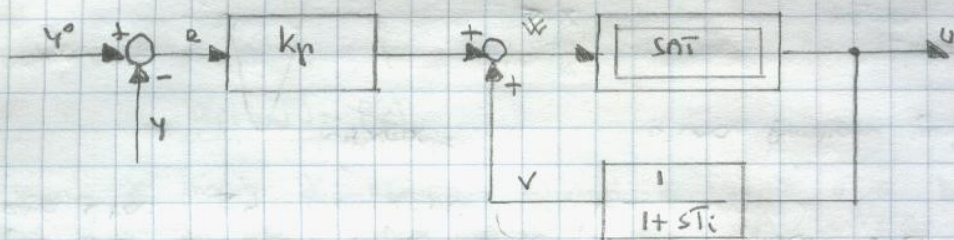
Pertanto questa da  $y^0$  a  $u$  diventa:

$$bk_p + \frac{k_p}{sT_i} = \frac{k_p}{T_i} \frac{1+sT_i}{s}$$

Quando in uscita ad un controllore ad azione integrale (PI, I, PID) opera un elemento saturante, può manifestarsi un allungamento dei tempi di risposta dovuto alla CARICA INTEGRALE. Spesso il fenomeno di saturazione, legato al comportamento di molti attuatori, viene introdotto nei controllori per far sì che la variabile di controllo operi entro l'intervallo  $U$  imposto.



Con questo sistema, se l'errore è molto maggiore di zero a lungo, la variabile di stato  $X$  del sistema che integra, tende a crescere indefinitamente, e spinge  $\hat{u}$  ad assumere valori sempre maggiori, maggiori di  $U_{MAX}$ . Quando  $y$  supera  $y^0$ , l'errore cambia di segno, e quindi  $\hat{u}$  dovrebbe iniziare a diminuire e quindi anche  $u$ . Ma se  $X$  è alto, occorrerà parecchio tempo prima che  $\hat{u}$ , e  $u$  vadano sotto  $U_{MAX}$ . Ecco che questo rappresenta un modo stupido di imporre i limiti a  $u$ . Per ovviare a questo problema si può usare il seguente sistema:



$$u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$$

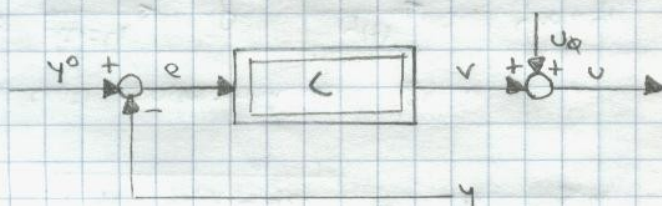
Come si nota, se l'errore è resta a lungo dello stesso segno (per esempio  $> 0$ ),  $u$  va in saturazione, e  $v$  tende a  $u_{max}$ . Non appena  $u$  cambia di segno, si ha:

$$v(t) = v(t) + K_p e(t) < u_{max} + K_p e(t) < u_{max} \Rightarrow u(t) < u_{max}$$

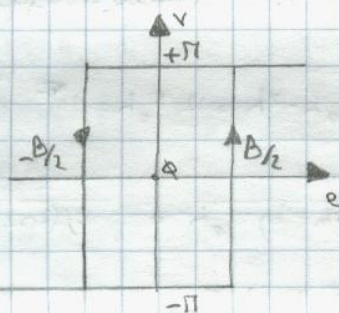
cioè si ha un' immediata diminuzione di  $u$ , con le conseguenti rientro, da parte del controllore, nella zona di funzionamento lineare. Si può dire:

$$G(s) = K_p \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sTi}} = K_p \frac{1+sTi}{1+sTi-1} = K_p \left(1 + \frac{1}{sTi}\right)$$

Analizziamo ora i controllori non lineari a commutazione. Il controllore a commutazione di gran lunga più diffuso è quello a DUE LIVELLI DI ISTERESI.



La cui caratteristica è la seguente:



Il controllore viene anche detto  $\pi B/2$ .

Riprendiamo in esame il caso della temperatura in una stanza. Quando si immette aria calda nella stanza, per aumentare la sua temperatura interna,  $v$  passi a  $+\pi$ . Anzitutto  $y$  tende ad avvicinarsi a  $y^0$ , se inizialmente  $y < y^0$ . Quindi l'errore  $e$  tende a decrescere. Ad un certo punto  $e$  incomincia ad avere valori negativi, e quindi a  $e = -B/2$  avviene una commutazione, e il controllore incomincerà ad immettere aria fredda nella stanza ( $v = -\pi$ ). E la cosa si ripete perfettamente. Analizziamo ora come è possibile scegliere i parametri dell'  $\pi B/2$ .

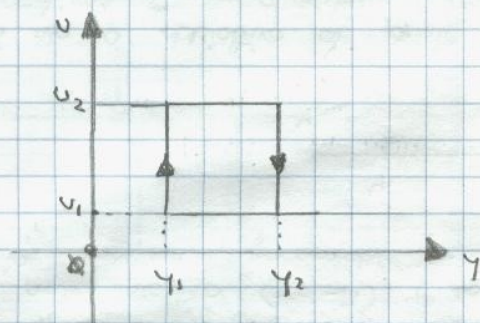


$$\Delta = (y_{max} - y_{min})/2$$

$$\begin{cases} y_1 = y_{min} + q\Delta \\ y_2 = y_{max} - q\Delta \end{cases} \quad \text{con } q \in [0, 1]$$

Si può dire che l'obiettivo di questo controllore è quello di far sì che il sistema di controllo abbia un regime periodico stabile in corrispondenza del quale  $y(t) \in [y_{min}, y_{max}]$ .

Quindi:



$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \pi \\ u_2 &= u_0 + \pi \\ y_1 &= y^0 - B/2 \\ y_2 &= y^0 + B/2 \end{aligned}$$

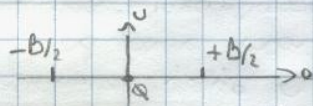
$$\begin{aligned} u_0 &= (u_1 + u_2)/2 \\ y^0 &= (y_1 + y_2)/2 \\ \pi &= (u_2 - u_1)/2 \\ B &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

$$y^0 - y = e \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y^0 - e \\ y_2 = y^0 + e \end{cases}$$

Analogamente:



$$\begin{cases} \text{se } y = -\pi \Rightarrow -\pi + u_0 = u_1 \\ \text{se } y = \pi \Rightarrow u_0 + \pi = u_2 \end{cases}$$



$$e = -B/2 \Rightarrow y^0 - y_1 = -B/2 \Rightarrow y^0 + B/2 = y_1$$

$$e = B/2 \Rightarrow y^0 - y_1 = B/2 \Rightarrow y_1 = y^0 - B/2$$

Si noti che:

$$u_0 = (u_1 + u_2)/2 \quad \text{e} \quad y^0 = (y_1 + y_2)/2 \quad \text{Infatti: } \pi = u_2 - u_1$$

$$\pi = u_2 - u_0 \Rightarrow u_0 - u_1 = u_2 - u_0$$

e:

$$\begin{cases} +B/2 = y^0 - y_1 \\ B/2 = y_2 - y^0 \end{cases} \Rightarrow y^0 - y_1 = y_2 - y^0 \Rightarrow 2y^0 = y_2 + y_1 \Rightarrow y^0 = (y_1 + y_2)/2$$

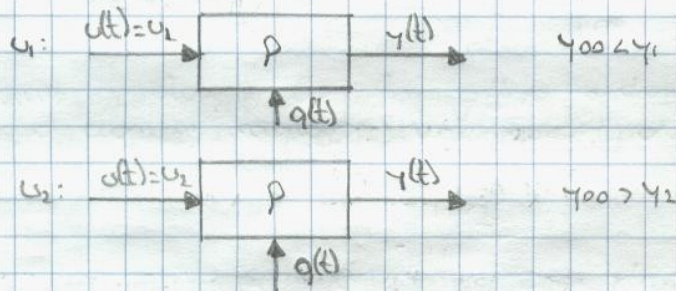
$$u_2 + u_1 = 2u_0$$

$$u_0 = (u_1 + u_2)/2$$

Dunque vogliamo determinare  $u_1, u_2, y_1, y_2$  noti  $(\pi, B, y^0, u_0)$ . Per scegliere  $y_1, y_2$  basta:

$$\begin{cases} y_1 = y_{\min} + qD \\ y_2 = y_{\max} - qD \end{cases} \quad \text{con } q \in [0, 1]$$

Per scegliere  $u_1, u_2$  basta:

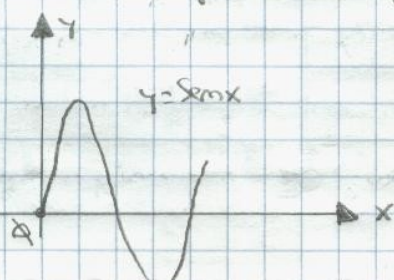


$$\forall q \in \mathbb{Q}$$

Prima di analizzare la linea classica del controllo è necessario ripassare alcuni concetti di risposta in frequenza. Prendiamo in considerazione un generico segnale. Esso può essere:

- 1) PERIODICO
- 2) NON PERIODICO

Un segnale si dice periodico quando si ripete in ugual maniera nel tempo. Ad esempio una sinusoidale si ripete nel tempo ed è quindi una funzione periodica. Graficamente si ha:



è una funzione periodica di periodo  $T = \pi$ .

Quindi una funzione periodica è una funzione che soddisfa la seguente condizione:

$$p(x+T) = p(x)$$

dove  $T$  prende le mosse di PERIODO. Quindi il periodo è il tempo necessario per compiere un intero ciclo, oppure il numero di secondi per ciclo. Il numero di cicli per secondo rappresenta la FREQUENZA, che è l'inverso del periodo.

$$P = \frac{1}{T}$$

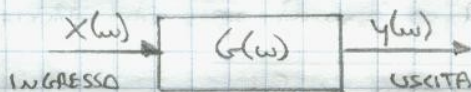
La frequenza si misura in Hertz.

Si ricordi inoltre che:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{e quindi} \quad P = \frac{\omega}{2\pi}$$

dove  $\omega$  è la ANGOLARE.

La RISPOSTA IN FREQUENZA di un CIRCUITO rappresenta la variazione del comportamento di un sistema al variare della frequenza del segnale. Consideriamo:



La risposta in frequenza è il grafico del modulo della p.d.t.  $G(\omega)$ , con  $\omega$  che varia tra 0 e  $\infty$ .

Si noti che:

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Si definisce ZERO la radice del numeratore di  $G$ , mentre POLO la radice del denominatore.

Si noti anche che lo zero è un valore che annulla la p.d.t., mentre un polo è un valore che fa tendere la p.d.t. a infinito. Il diagramma più utilizzato per visualizzare la risposta in frequenza di un sistema, è il DIAGRAMMA DI BODE. Poiché i diagrammi di Bode si basano sui logaritmi e i decibel forniamo un paio di definizioni e proprietà.

$$1) \log d \cdot \beta = \log d + \log \beta$$

$$2) \log d / \beta = \log d - \log \beta$$

$$3) \log d^n = n \log d$$

$$4) \log 1 = 0$$

Inoltre per definizione si ha:

$$G_{dB} = 20 \log_{10} G$$

Vediamo ora come si costruiscono questi diagrammi di Bode. Notiamo innanzitutto che la funzione di trasferimento può essere così scritta:

$$G = G e^{i\varphi} \rightarrow \text{forma esponenziale}$$

Usando le logaritmi si ha:

$$\ln G = \ln G e^{i\varphi} = \ln G + \ln e^{i\varphi} = \ln G + i\varphi$$

Si noti subito che:

$$z = x + iy \rightarrow \text{numero complesso} \Rightarrow \ln z = \ln x + i\varphi$$

$\downarrow$  parte reale       $\downarrow$  parte immaginaria  
 $\downarrow$  parte reale       $\downarrow$  parte immaginaria

Si ricordi che:  $G_{dB} = 20 \log_{10} G$ . Una p.d.t. scritta nella forma:

$$h_{tot} = h_{nk} + h_{nc} e^{i\varphi}$$

può essere risolta nella seguente forma:

$$G(\omega) = \frac{k(\omega)^{-1} (1 \pm j\omega/z_1) [1 \pm j2\zeta_1 \omega/\omega_{n1} + (j\omega/\omega_{n1})^2] \dots}{(1 \pm j\omega/p_1) [1 \pm j2\zeta_2 \omega/\omega_{n2} + (j\omega/\omega_{n2})^2] \dots}$$

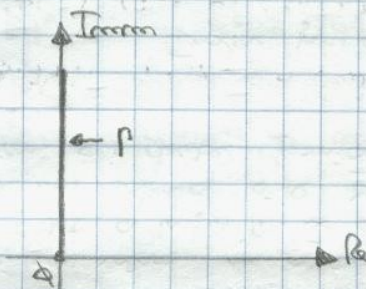
dove  $k$  è il GUADAGNO. Quindi sia  $G(s)$  una generica funzione di trasferimento di un sistema dinamico  $S$  continuo e lineare a tempo invariante (LTI).



La risposta in frequenza  $p$  di  $S$  è la restrizione di  $G$  al semipiano immaginario puro positivo. Quindi:

$$p = \{ G(j\omega), \omega \in [\omega_0, \infty] \}$$

Graficamente si ha:



Se il sistema  $S$  è asintoticamente stabile, e l'ingresso  $u(t)$  possiede la trasformata di Fourier continua  $U(j\omega)$ , allora la trasformata di Fourier della risposta di  $S$  all'ingresso  $u(t)$ , con condizioni iniziali nulle, esiste ed è:

$$Y(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_0, \infty]$$

Si noti che la trasformata che permette di parlare dell'ingresso  $u(t)$  del dominio del tempo al dominio delle frequenze. Si noti anche che la risposta periodica di periodo  $T$  di un sistema  $S$ , a un ingresso  $u$  periodico di periodo  $T$ , e che se esiste una condizione iniziale di  $S$  che permette ciò. Indichiamo con  $y_p$  tale uscita. Se  $S$  è un sistema a dimensioni finite, e:

$$u(t) = U \cos(\omega t)$$

Sarà in uscita un segnale periodico di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  tale che:

$$y(t)_p = Y \cos(\omega t + \varphi)$$

dove:

$$Y = |G(j\omega)| U \quad ; \quad \varphi = \angle G(j\omega)$$

$\swarrow$  Modulo                       $\searrow$  Fase

Noi sappiamo inoltre che un sistema  $S$  che ha un segnale  $u(t)$  periodico di periodo  $T$  è un sistema periodico. Se  $u(t)$  è un segnale periodico, si può

sviluppare lo stesso in SERIE DI FOURIER. Quindi:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

e sotto certe ipotesi, si ottiene in uscita:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos(k\omega t + \psi_k)$$

Noi sappiamo che:

$$G(s) = \frac{U(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^m + d_1 s^{m-1} + \dots + d_m}$$

Se sono noti i poli e i zeri di  $G(s)$ , la  $G(s)$  può essere riscritta in vari modi:

$$G(s) = p \frac{\prod_h (s + z_h)}{\prod_k (s + p_k)}$$

dove  $p$  è il parametro noto come COSTANTE DI TRASFERIMENTO.

Si noti che  $p_i, z_i$  sono i poli e i zeri della funzione di trasferimento. Si noti che in questa tipo di illustrazione i zeri e i poli sono reali. Se volessimo aggiungere anche i zeri e i poli complessi, si avrebbe:

$$G(s) = p \frac{\prod_h (s + z_h) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \hat{\omega}_{ni} s + \hat{\omega}_{ni}^2)}{\prod_k (s + p_k) \prod_r (s^2 + 2\zeta_r \omega_{nr} s + \omega_{nr}^2)}$$

È possibile anche definire la  $G(s)$  tramite le costanti di tempo  $T_i$ . Cioè:

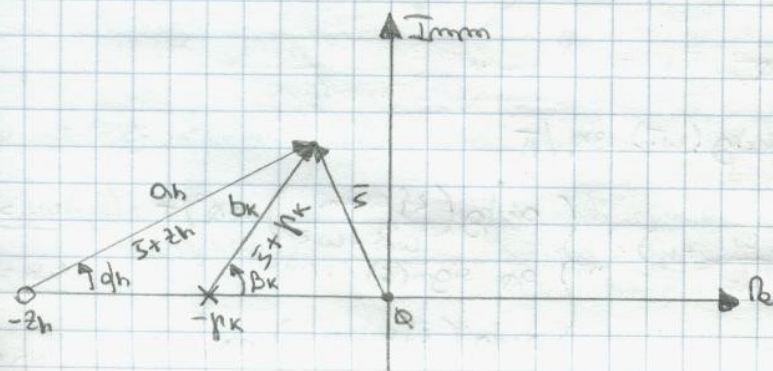
$$G(s) = \frac{1}{s^g} \frac{\prod_h (\hat{T}_h s + 1)}{\prod_k (T_k s + 1)} \cdot \frac{\prod_i \left( \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} + 2\zeta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + 1 \right)}{\prod_r \left( \frac{s^2}{\omega_{nr}^2} + 2\zeta_r \frac{s}{\omega_{nr}} + 1 \right)}$$

dove  $\prod$  viene detta GUADAGNO, mentre  $g$  è il tipo. Si noti che  $T_i$  sono le relative costanti di tempo. Si noti anche che se  $g > 0$  si tratta di poli nell'origine, mentre se  $g < 0$  si tratta di zeri nell'origine. Consideriamo:

$$G(s) = p \frac{\prod_h (s + z_h)}{\prod_k (s + p_k)} = p \frac{\prod_h a_h}{\prod_k b_k} \exp[j(\sum_h \alpha_h - \sum_k \beta_k)]$$

$$\begin{cases} a_h = |s + z_h| \\ b_k = |s + p_k| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_h = \angle (s + z_h) \\ \beta_k = \angle (s + p_k) \end{cases}$$



$\begin{cases} x = \text{polo} \\ o = \text{zero} \end{cases}$

NB: Su queste cose ci torneremo tra breve.

Torneremo invece al Diagramma di Bode:

