

uguale a 1 sono semplici se e solo se $V(z)$ è a polo finito. Si noti inoltre che se almeno un polo di $V(z)$ ha modulo maggiore di 1, oppure ha modulo uguale a 1 ma molteplicità maggiore di 1, allora $V(k)$ è ILLIMITATA. Si noti anche che se tutti i poli di $V(z)$, tranne eventualmente polo in 1, sono interni alla circonferenza unitaria e distano dall'origine almeno di ρ , allora $V(k)$ è praticamente costante (transitorio esaurito) dopo un numero di passi pari a:

$$N = \frac{1+z^{\rho}}{1-\rho}$$

$$N \leq N_{\max} \iff \rho \leq \frac{N_{\max}-1}{N_{\max}+2}$$

Infine ad ogni coppia di poli complessi coniugati di $V(z)$, corrisponde in $V(k)$ un'oscillazione il cui periodo e il cui smorzamento sono legati al suo modulo e argomento. Consideriamo ora le varie trasformate note in precedenza per i segnali discreti. Consideriamo la trasformata di Fourier continua per i segnali a tempo discreto; essa si applica a tutti quei segnali definiti su z , assolutamente sommabili o a energia finita, valide:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v(k)| < \infty \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)^2 < \infty$$

Quindi per definizione:

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) e^{-j\omega k} \quad \rightarrow \quad \text{TR. CONTINUA DI FOURIER PER SEGNALE DISCRETI.}$$

facciamo subito alcune considerazioni. Un generico segnale v su z insieme z^+ è Fourier-trasformabile e quindi anche z -trasformabile. In generale non è viceversa. Quindi:

$$V(e^{j\omega}) = V(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \Rightarrow V(e^{-j\omega}) = \overline{V(e^{j\omega})}$$

NB: "—" : complesso coniugato.

Vediamo ora alcune proprietà della trasformata di Fourier continua per segnali discreti:

• linearità: $v(k) = \alpha v_1(k) + \beta v_2(k) \Rightarrow V(e^{j\omega}) = \alpha V_1(e^{j\omega}) + \beta V_2(e^{j\omega})$

• Ritardo: $v_2(k) = v_1(k-R) \Rightarrow V_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega R} V_1(e^{j\omega})$

• Prodotto di convoluzione reale:

$$v(k) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} v_1(k-h) v_2(h) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} v_1(h) v_2(k-h)$$

$$\Downarrow$$

$$V(e^{j\omega}) = V_1(e^{j\omega}) V_2(e^{j\omega})$$

• Prodotto:

$$r(k) = V_1(k) \cdot V_2(k) \Rightarrow V(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_1(\psi - \theta) V_2(\theta) d\theta$$

• Th di Parseval:

$$\text{se } r(k) \text{ è un segnale a energia finita} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V(\psi)|^2 d\psi$$

Valiamo ora la trasformata di Fourier discreta per segnali discreti. Essa si applica ai segnali definiti su $\mathbb{Z}$ e periodici, cioè tali che:

$$r(k+N) = r(k)$$

Per definizione si ha:

$$V^*(h) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r(k) e^{-j h \phi k} \quad \text{con } \phi = \frac{2\pi}{N}$$

↳ TR. DI FOURIER DISCRETA PER SEGNALE DISCRETI.

La formula di antitrasformazione è:

$$r(k) = \sum_{h=0}^{N-1} V^*(h) e^{j h \phi k}$$

Si noti che $V^*(h)$ è periodico di periodo N . Quindi:
Inoltre:

$$V^*(h+N) = V^*(h) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \underline{V^*(-h) = V^*(N-h) = \overline{V^*(h)}}$$

Per quanto riguarda i segnali di durata finita discreti si ha:

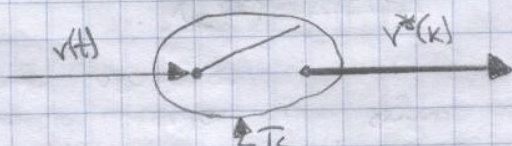
$$V(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) e^{-j \psi k} = \sum_{k=0}^{N-1} r(k) e^{-j \psi k} \rightarrow \text{T.F. continua}$$

$$V^*(h) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r(k) e^{-j h \phi k} \rightarrow \text{T.F. discreta}$$

$$\text{NB: } \phi = h\phi$$

$$\text{Formulare e uguaglianza} \Rightarrow \underline{V^*(h) = \frac{1}{N} V(\psi = h\phi)}$$

Quindi anche qui la trasformata di Fourier continua è ridondante. Riprendiamo ora in esame il campionatore ideale. Lo analizziamo ora nel dominio della frequenza.



Sia $x(t)$ il valore, all'istante t , di un segnale a tempo continuo.

Un campionatore ideale, come già detto, è un dispositivo che, ricevendo in ingresso

dal segnale, restituisce in uscita un segnale a tempo discreto $v^*(\cdot)$ legato alla $v(\cdot)$, dalla seguente relazione:

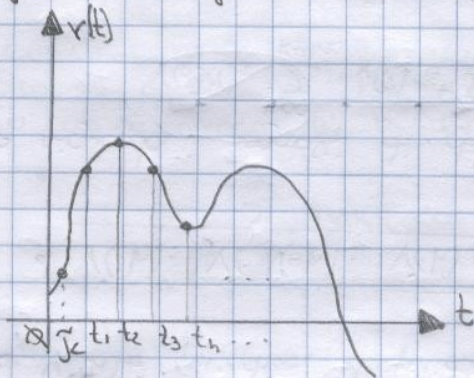
$$v^*(k) = v(t_k)$$

dove t_k rappresenta l'insieme dei numeri reali detti istanti di campionamento. Si ricorda che T_c viene detto PERIODO DI CAMPIONAMENTO. Si chiamano rispettivamente:

$$f_c = 1/T_c \rightarrow \text{FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO}$$

$$\omega_c = 2\pi/T_c \rightarrow \text{PULSAZIONE DI CAMPIONAMENTO}$$

Per poter specificare adeguatamente un campionamento periodico, è necessario ovviamente precisare le prime istanze di campionamento. Sia $\tilde{t}_c$ tale istante.



Quindi:

$$v^*(k, \tilde{t}_c) = v(\tilde{t}_c + kT_c)$$

* Si noti che

Per poter comprendere pienamente il campionamento periodico ideale, bisogna analizzare le seguenti proprietà del campionamento: la trasformata di Fourier continua del segnale di ingresso continuo $v(\cdot)$, e la trasformata di Fourier continua del segnale di uscita discreto $v^*(\cdot)$. Tale legame viene visto nel TEOREMA F*. Tale legame afferma che:

$$\forall \omega \in (-\infty, \infty) \rightarrow V^*(e^{j\omega T_c}) = \frac{1}{T_c} V_c(j\omega)$$

dove la trasformata Z di $v^*(\cdot)$ è $V^*(\cdot)$, mentre se $V(\cdot)$ è la trasformata di Laplace di $v(\cdot)$ si ha:

$$V(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V(s + jk\omega_c)$$

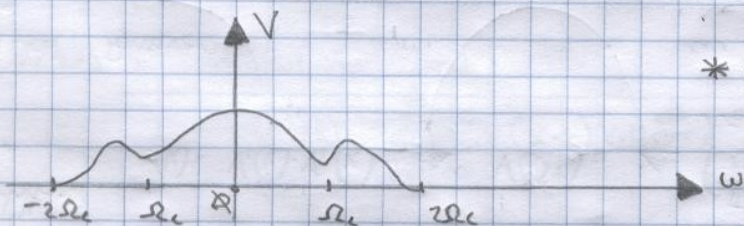
Analizziamo la funzione V_c . Ricordiamo innanzitutto che:

$$V_c(-j\omega) = \overline{V_c(j\omega)}$$

Quindi, $V_c(\cdot)$ è periodica di periodo ω_c . Cioè:

$$V_c(j(\omega + \omega_c)) = V_c(j\omega) \quad \forall \omega$$

Perciò:



* L'analisi su $j\omega$ può essere condotta nell'intervallo:

$$[0, j\omega_c]$$

dove:

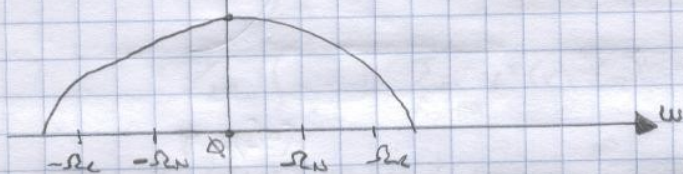
$$\omega_c = \omega_c/2$$

Si noti che ω viene detta PULSAZIONE DI NYQUIST. Si noti che per $\forall \omega \in [-\omega_N, \omega_N]$ si ha:

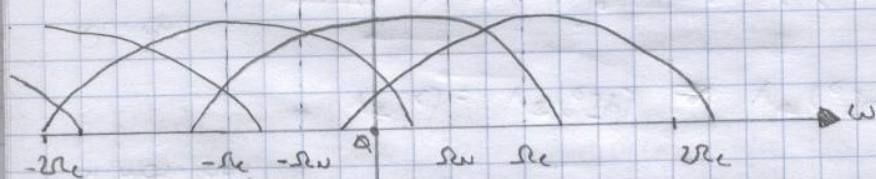
$$V_c(-j\omega) = V_c(j\omega)$$

mentre l'andamento completo di $V_c(\cdot)$ non è che l'estensione periodica di quella su $[-j\omega_N, j\omega_N]$. Perciò grazie al teorema F^* , le equazioni tra le trasformate di ingresso e uscita di Fourier vengono viste come le equazioni tra l'andamento di $V(\cdot)$ sul semiasse immaginario positivo, e $V_c(\cdot)$ sull'intervallo $[-\omega_N, \omega_N]$ dell'asse immaginario. Si noti che $V_c(j\omega)$ è la somma di infiniti addendi del tipo $V(j(\omega + k\omega_N))$, ognuno dei quali può essere interpretato come il valore in ω della trasformata di Fourier di $v(\cdot)$ centrata in $-k\omega_N$ anziché nell'origine. Graficamente:

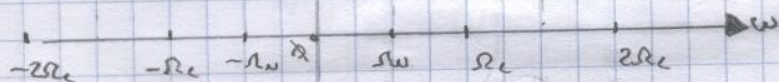
$\uparrow V(j\omega)$



$\uparrow$



$\uparrow V_c(j\omega)$



Analizziamo ora la TEORIA DEL CAMPIONAMENTO. Sia $v(\cdot)$ un segnale a banda limitata e la sua frequenza massima sia minore di quella di Nyquist, e:

$$(\omega_c < \omega_N = \omega_c/2)$$

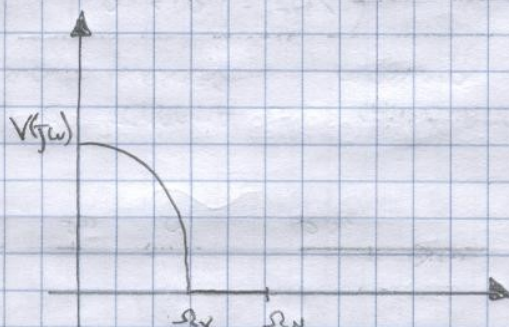
Adesso la conoscenza di $V^*(\cdot)$ consente di determinare esattamente $V(\cdot)$. Immaginato un segnale si dice A BANDA LIMITATA, se esso è continuo e esiste un ω_c tale che:

$$V(j\omega) = 0, \quad \forall \omega \geq \omega_c$$

La PULSAZIONE MASSIMA Ω_v di un segnale a banda limitata è l'estremo superiore dell'insieme dei valori di ω tali che:

$$V(j\omega) \neq 0.$$

Graficamente si ha:



Consideriamo:



Abbiamo detto che se $\Omega_v < \Omega_N$, allora la conoscenza di $v^*(\cdot)$ consente di determinare $v(\cdot)$. Si noti che v^* è equivalentemente informazioni a $v(\cdot)$ se $\Omega_v < \Omega_N$. Si noti che:

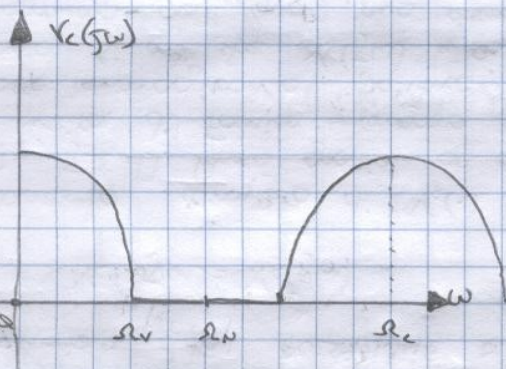
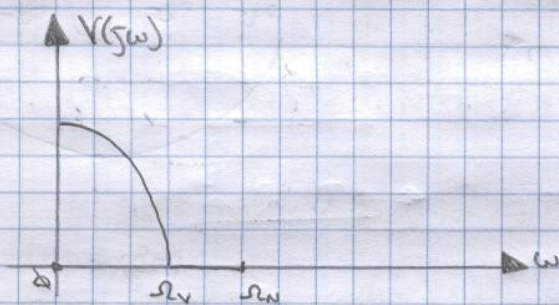
$$v^*(k) = V^*(e^{j\omega T_c}) \Rightarrow V^*(e^{j\omega T_c}) = \frac{1}{T_c} V_c(j\omega) \Rightarrow T_c V^*(e^{j\omega T_c}) = V_c(j\omega)$$

Quindi:

$$V(j\omega) = V_c(j\omega), \quad \omega \in (-\Omega_N, \Omega_N)$$

NB: Abbiamo usato la formula F^* .

Infatti se $\Omega_v < \Omega_N$ si ha che $V(j\omega) = V_c(j\omega)$ e quindi:



* Con le th del campionamento quindi è possibile risolvere il problema dell'aliasing.

Ma come è possibile calcolare effettivamente $v(\cdot)$ nota $v^*(\cdot)$, e supponendo che siano rispettate le ipotesi del teorema del campionamento? Ci viene in aiuto la FORMULA DI SHANNON. Noi sappiamo, per il teorema F.T. che:

$$V(j\omega) = T_c V^*(j\omega T_c) \quad \text{per } \omega \in [-j\omega_N, j\omega_N].$$

Ritornando all'intertrasformando secondo Fourier si ha:

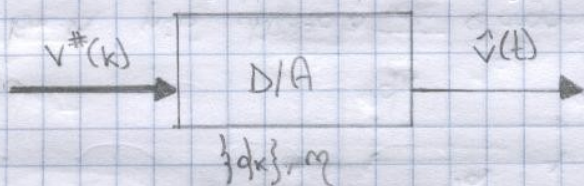
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} T_c V^*(j\omega T_c) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_c}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} V^*(j\omega T_c) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} V^*(k) (e^{j\omega T_c})^{-k} \right] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} V^*(k) \right. \\ &\quad \left. (e^{j\omega k T_c}) \right] e^{j\omega t} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V^*(k) \frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} e^{j\omega(t - kT_c)} d\omega \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

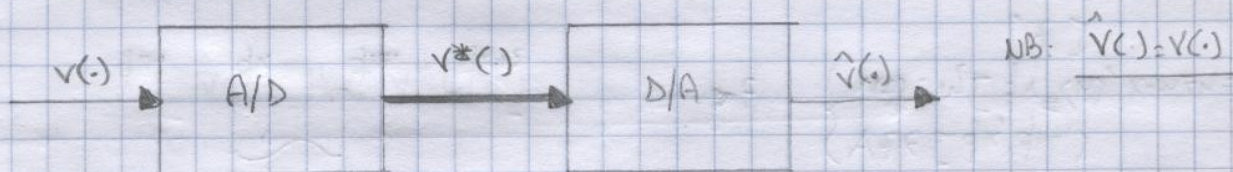
$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V^*(k) \frac{\text{Sen}(\omega_N t - k\pi)}{\omega_N t - k\pi} \quad \rightarrow \text{FORMULA DI SHANNON.}$$

Si noti che $v(t)$ dipende da tutta la $v^*(k)$.

Analizziamo ora la CONVERSIONE D/A. Questa operazione viene omessa dalla gestione di TENUTA.



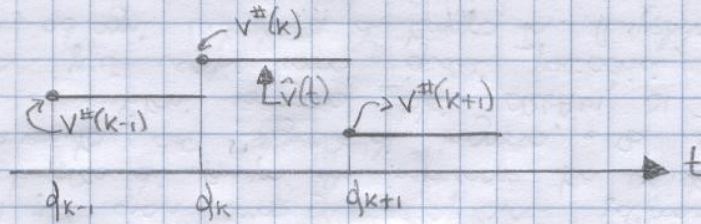
Una conversione D/A è tanto più "buona" quanto meglio approssima il comportamento di un DEAMPLIFICATORE. In breve:



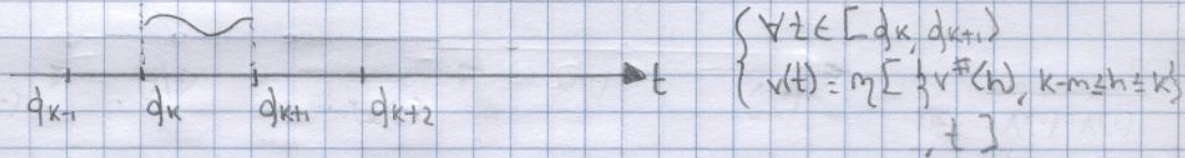
Si osserva che il decampionamento periodico è descritto dalla formula di Shannon. I convertitori D/A più usati sono gli interpolatori polinomiali che mantengono per un certo tempo l'ultimo valore pervenuto dal segnale di ingresso, e la successiva acquisizione. Per questo questi convertitori vengono detti ORGANI DI TENUTA. Attualmente gli organi di tenuta più usati sono quelli periodici, dove è ingesso $V^*(k)$ viene aggiornato ad ogni intervallo di tempo T_a . Rispettivamente:

T_a = periodo di aggiornamento
 τ_a = pulsazione di " " } o di acquisizione
 f_a = frequenza di " "

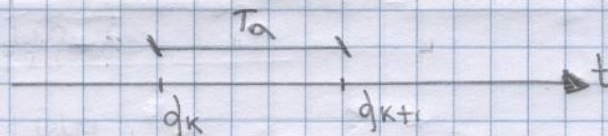
Gli q_k sono gli Istanti di ACQUISIZIONE (AGGIORNAMENTO). Graficamente:



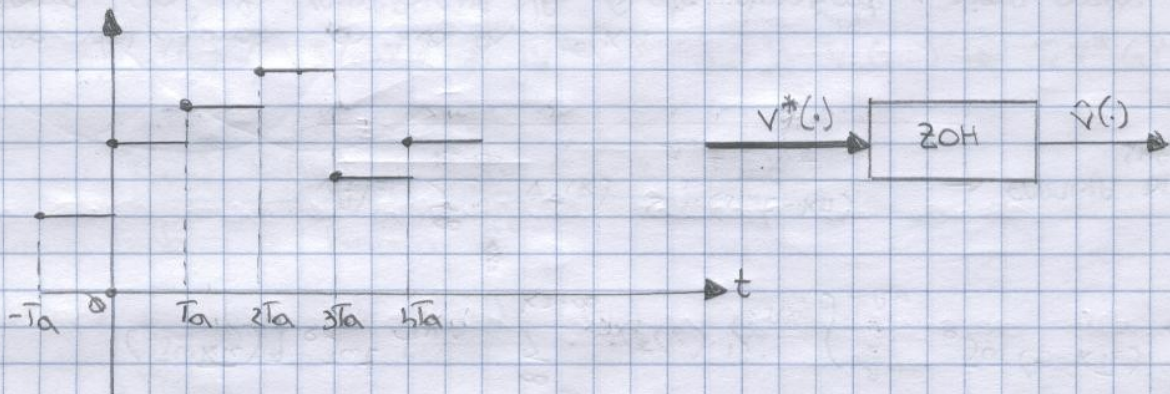
insieme alla FUNZIONE DI ESTRAPOLAZIONE.



Nel caso di D/A periodici, si ha che $q_{k+1} = q_k + T_a$.



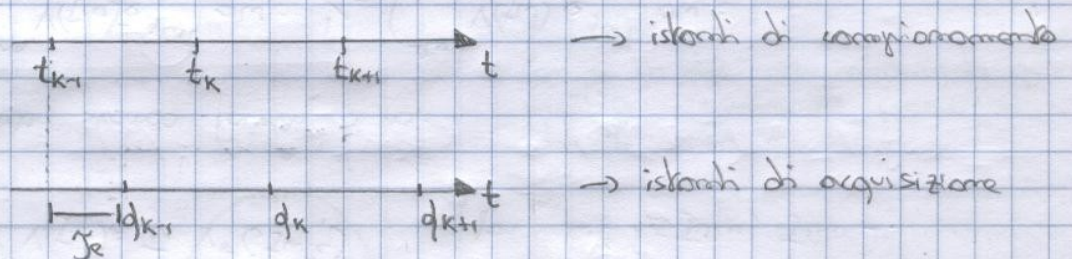
L'organo di tenuta più utilizzato è l'organo di tenuta di ordine zero ed è indicato con la sigla ZOH che sta per Zero-Order Hold. Il suo funzionamento è il seguente:



Andiamo ora brevemente in contatto di sincronizzazione tra A/D e D/A. Noi sappiamo che:

$$T_a = T_c = T \Rightarrow \text{Periodo di acquisizione} = \text{Periodo di campionamento}$$

Sia ora:



si noti che una volta campionato un segnale per poter poi acquisire nella fase inversa, bisogna attendere un tempo T_e detto RITARDO DI ELABORAZIONE definito così:

$$T_e = q_k - t_k \Rightarrow q_k = T_e + t_k$$