Un segnale discreto è a energia finita se:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v^2(k) < \infty$$

e analogamente un segnale discreto è a potenza finita se:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} v^2(k) < \infty$$

Si osservi che i segnali continui a energia finita si annullano all'infinito e hanno potenza (media) nulla. Inoltre i segnali periodici limitati sono a potenza finita, mentre i segnali a potenza finita non sono, in generale, periodici. Vediamo ora alcune trasformate. (prima per i segnali a tempo continuo).

1) TRASFORMAZIONE DISCRETA DI FOURIER: Essa si applica a segnali periodici assolutamente integrabili e con un numero finito di massimi e minimi e discontinuità per periodo.

- $v(t+T) = v(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$
- $\int_0^T |v(t)|\, dt < \infty$

$$\boxed{v^\circ(h) = \frac{1}{T}\int_0^T v(t) e^{-jh\omega_0 t}\, dt}$$ → TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER.

Infatti: $f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \dots$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

Quindi la serie di Fourier di una funzione (o segnale) periodica $f(t)$ è una rappresentazione di $f(t)$ composta da una componente costante e da una serie di armoniche sinusoidali. Affinché un segnale sia rappresentabile in serie di Fourier è necessario che siano soddisfatte le seguenti condizioni di Dirichlet:

1) $f(t)$ è a un sol valore ovunque;

2) $f(t)$ possiede un numero finito di discontinuità in un periodo;

3) $f(t)$ possiede un numero finito di massimi e minimi in un periodo.

4) $\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty$ (ASSOLUTA INTEGRABILITÀ).

Quindi una funzione periodica non sinusoidale può essere rappresentata mediante una serie di Fourier se soddisfa le condizioni di Dirichlet. Noi sappiamo che la serie di Fourier può essere scritta anche in forma esponenziale.

$$\left.\begin{aligned} \cos n\omega_0 t &= \tfrac{1}{2}\left[e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right] \\ \operatorname{sen} n\omega_0 t &= \tfrac{1}{2j}\left[e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right] \end{aligned}\right\} \text{IDENTITÀ DI EULERO}$$

⇓

⇓

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[(a_m - jb_m)e^{jm\omega_0 t} + (a_m + jb_m)e^{-jm\omega_0 t}\right]$$

Definendo un nuovo coefficiente c tale che:

$$c_0 = a_0 \quad e \quad c_m = \frac{(a_m - jb_m)}{2} \quad e \quad c_{-m} = c_m^* = \frac{(a_m + jb_m)}{2}$$

⇓

$$f(t) = c_0 + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(c_m e^{jm\omega_0 t} + c_m^* e^{-jm\omega_0 t}\right);$$

Si noti però che si può anche scrivere:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\omega_0 t}$$ → FORMA ESPONENZIALE DELLA SERIE DI FOURIER.

con: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Posto:

$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt \Rightarrow \underbrace{F(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-j\omega\Omega t}\, dt}_{*}$$

NB: Dopo una serie di passaggi matematici si giunge a *.

La formula di ANTITRASFORMAZIONE è la seguente:

$$v(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} V^{\circ}(h)\, e^{jh\Omega t}$$

2) TRASFORMATA DI FOURIER CONTINUA: si applica a segnali definiti su R, assolutamente integrabili o "a energia finita", e con un numero finito di massimi e di minimi e discontinuità su ogni intervallo di durata finita.

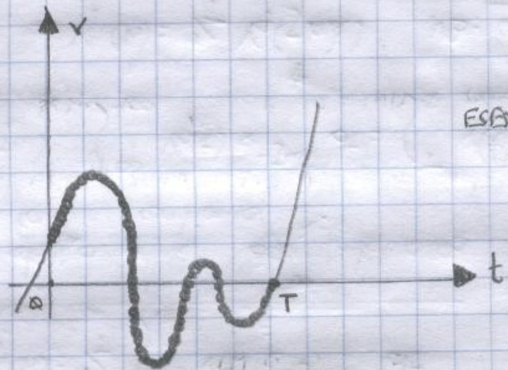
$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}$$

L'antitrasformazione è:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

3) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE DI DURATA FINITA.

Si consideri un segnale $v(t)$ a durata "finita", cioè un segnale che non dura fino all'infinito.



ESEMPIO DI SEGNALE DI DURATA FINITA.

NB: 1) Se si considera un segnale $v(t)$ ad energia finita, nullo fuori e' intervallo $[0,T]$, se ne può calcolare la trasformata continua di Fourier:

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{T} v(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

2) Se si considera un segnale $v(t)$ periodico di periodo T, e si calcola la corrispondente trasformata di Fourier discreta:

$$V^{*}(h) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} v(t)\, e^{-jh\Omega t}\,dt = \frac{1}{T} V(jh\Omega)$$

Quindi per un segnale di durata finita, la trasformata di Fourier continua è ridondante. Un suo campionamento a passo Ω o a passo Ω', con $\Omega' \leq \Omega$, contiene esattamente la stessa informazione. Rivediamo meglio quanto affermato visto su queste trasformazioni. Abbiamo visto, inizialmente che ci sono due tipi di segnali: i segnali a energia totale finita, e i segnali a potenza media finita. Abbiamo detto che un segnale $v(t)$ è a energia finita se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt < \infty \quad \rightarrow \text{CASO CONTINUO}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v^2(k) < \infty \quad \rightarrow \text{CASO DISCRETO}$$

mentre è a potenza finita se:

$$\lim_{J\to\infty} \frac{1}{2J}\int_{-J}^{J} v^2(t)\,dt < \infty \quad \rightarrow \text{CASO CONTINUO}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m+1}\sum_{k=-m}^{m} v^2(k) < \infty \quad \rightarrow \text{CASO DISCRETO}$$

Abbiamo inoltre visto che i segnali continui a energia finita si annullano all'infinito e hanno potenza media nulla. I segnali periodici limitati sono a potenza finita, mentre i segnali a potenza finita non sono in genere periodici. Prendiamo ora in considerazione i segnali continui. Sia $v(t)$ un segnale continuo, e $t \in \mathbb{R}$. Quindi $v(t)$ è una funzione reale periodica di periodo T, e tale che:

$$\int_{0}^{T} |v(t)|\,dt < \infty$$

Chiamiamo TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA di $v(\cdot)$ la funzione complessa di variabile intera costituita dalla sequenza dei coefficienti di Fourier.

$$V(h) = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, e^{-jh\Omega t}\, dt \qquad \text{con} \quad \Omega = 2\pi/T$$

Si ricordi che $V(-h) = \bar{V}(h)$. La formula di antitrasformazione è:

$$v(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} V(h)\, e^{jh\Omega t}$$

Sia ora $v(t)$ con $t \in \mathbb{R}$ una generica funzione reale, tale che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|\, dt < \infty$$

si ha che la TRASFORMATA DI FOURIER di $v(\cdot)$ CONTINUA è una funzione complessa di variabile immaginaria tale che:

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

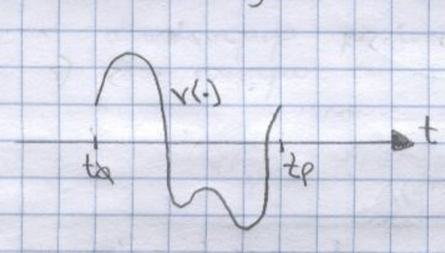
La formula di antitrasformazione è:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Sia ora $v(t)$ con $t \in [0, T]$ una funzione reale tale che:

$$\int_0^T |v(t)|\, dt < \infty \rightarrow \text{ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE}$$

Si ricordi che un segnale di durata finita è un segnale del seguente tipo:



NB: ci possono essere infinite funzioni estese su tutto $\mathbb{R}$, tali che in $[0,T]$ siano equivalenti a quella rappresentata qui a lato.

Noi però consideriamo la funzione $v_p(\cdot)$ che è l'estensione periodica di $v(\cdot)$. Quindi:

$$V_p(h) = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, e^{-jh\Omega t}\, dt \qquad \text{con} \quad \Omega = 2\pi/T$$

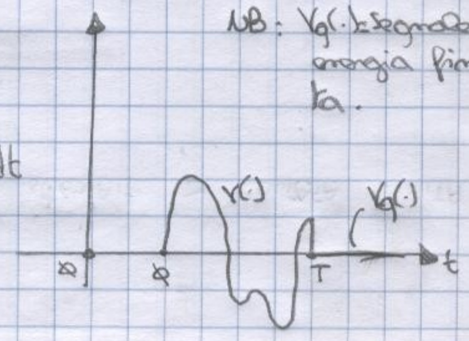
Sia poi $v_g(\cdot)$ nulla esternamente all'intervallo $[0,T]$. La sua trasformata di Fourier continua è:

NB: $v_g(\cdot)$ è segnale a energia finita.

$$V_g(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^T v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$V_p(h) = \frac{1}{T} V_g(jh\Omega) \qquad \text{NB: } \omega = \Omega h$$



Quindi in conclusione un segnale di durata finita è un segnale in cui la trasformata di Fourier continua è ridondante. Quindi $V_p(\cdot)$ altro non è che il risultato di un campionamento periodico di periodo e_r di $V_g(\cdot)$. Tale campionamento non comporta perdita di informazione. Torneremo più tardi su questo argomento. Prendiamo ora $v(t)$ con $t \in \mathbb{R}^+$, a tale che:

$$\int_0^\infty |v(t)|\, e^{-\alpha t}\, dt < \infty \quad \text{per almeno un } \alpha.$$

Allora, per definizione, la trasformata di Laplace per un segnale continuo è:

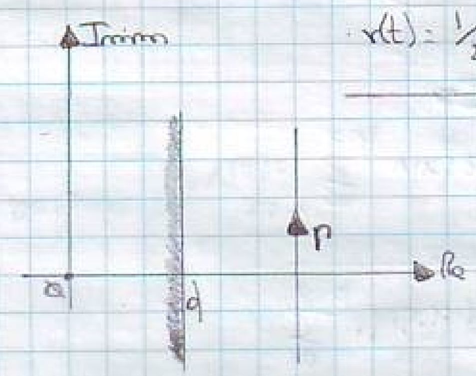
$$V(s) = \int_0^\infty v(t)\, e^{-st}\, dt$$

che è una funzione complessa della variabile complessa s definita per $Re(s) > \alpha$. Vediamo di capire da dove viene fuori questa formula. Data una funzione $f(t)$ con t reale, indichiamo con $F(s)$ la sua trasformata di Laplace:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

dove s è una variabile complessa $(s = x+iy)$. Quindi la trasformata di Laplace è una trasformazione integrale di una funzione $f(t)$ dal dominio del tempo a quello della frequenza complessa. Si ricordi che la antitrasformazione è:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma V(s)\, e^{st}\, ds$$



* Nel dominio discreto non si usa la trasformata di Laplace ma la trasformata Z.

Prima di affrontare la trasformata Z, forniamo alcune proprietà della trasformata di Laplace.

- LINEARITÀ: $v(t) = \alpha v_1(t) + \beta v_2(t) \Longleftrightarrow V(s) = \alpha V_1(s) + \beta V_2(s)$

- RITARDO E FATTORE ESPONENZIALE:
$$\begin{cases} v_2(t) = v_1(t-\tau), \ \tau \geq 0 \Longleftrightarrow V_2(s) = e^{-\tau s} V_1(s) \\ v_2(t) = e^{-at} v_1(t) \Longleftrightarrow V_2(s) = V_1(s-a) \end{cases}$$

- PRODOTTO DI CONVOLUZIONE REALE:
$$v(t) = \int_0^t v_1(t-\tau)\, v_2(\tau)\, d\tau \Longleftrightarrow V(s) = V_1(s) \cdot V_2(s)$$

- DERIVATA E INTEGRALE:
$$\begin{cases} v_2(t) = \dot{v}_1(t) \Longleftrightarrow V_2(s) = sV_1(s) - v_1(0) \\ v_2(t) = \int_0^t v_1(\tau)\, d\tau \Longleftrightarrow V_2(s) = \frac{1}{s} V_1(s) \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} s = \text{"derivazione"} \\ 1/s = \text{"integrazione"} \end{cases}$$

- TEOREMA DEL VALORE INIZIALE:

$$\lim_{t \to 0} v(t) = \lim_{s \to \infty} sV(s) \qquad (\text{NB: } t = 1/s)$$

- TEOREMA DEL VALORE FINALE:

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{s \to 0} sV(s)$$

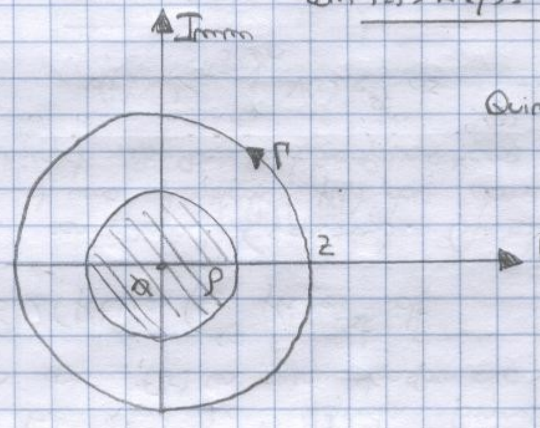
Affrontiamo ora la trasformata z. Supponiamo di avere un segnale $v(k)$ con $k \in Z^+$, tale che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v(k)| \rho^{-k} < \infty$$

Si noti che:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}$$

è una complessa e analitica nel cerchio con $|z| > R(\rho)$.



Quindi:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}$$

è la trasformata z del segnale.

La formula di antitrasformazione è:

$$v(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} V(z) z^{k-1} dz .$$

Si noti che:

- $v(k) = Imp(k) \Rightarrow V(z) = 1$
- $v(k) = Sca(k) \Rightarrow V(z) = \frac{z}{z-1}$
- $v(k) = Ram(k) \Rightarrow V(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
- $v(k) = e^{\beta k} \Rightarrow V(z) = z / z - e^{\beta}$

Analogamente per la trasformata di Laplace:

- $v(t) = Imp(t) \Rightarrow V(s) = 1$
- $v(t) = Ram(t) \Rightarrow V(s) = 1/s^2$
- $v(t) = Sca(t) \Rightarrow V(s) = 1/s$

Vediamo ora alcune proprietà della trasformata Z.

- LINEARITÀ:

$$v(k) = \alpha v_1(k) + \beta v_2(k) \Rightarrow V(z) = \alpha V_1(z) + \beta V_2(z)$$

- ANTICIPO:

$$\begin{cases} v_2(k) = v_1(k+1) \\ V_2(z) = z(V_1(z) - v_1(0)) \end{cases}$$

- RITARDO:

$$\begin{cases} v_2(k) = v_1(k-1) \\ V_2(z) = z^{-1} V_1(z) \end{cases}$$

- PRODOTTO DI CONVOLUZIONE REALE:

$$v(k) = \sum_{h=0}^{k} v_1(k-h) v_2(h) \Rightarrow V(z) = V_1(z) V_2(z)$$

- TEOREMA DEL VALORE FINALE:

$$\lim_{k \to \infty} v(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) V(z);$$ * se tutti i poli diversi da 1 di $V(z)$ hanno modulo minore di 1.

- TEOREMA DEL VALORE INIZIALE: $$v(0) = \lim_{z \to \infty} V(z)$$

NB: $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$

Facciamo subito un esempio. Supponiamo che $V_1(z)$ sia la trasformata Z di $v_1(k)$, bisogna calcolare la trasformata Z del segnale:

$$v_2(k) = \sum_{h=0}^{k} v_1(h).$$

Notiamo che:

$$v_2(k) = v_2(k-1) + v_1(k) \Rightarrow V_2(z) = z^{-1} V_2(z) + V_1(z)$$

$$\Downarrow$$

$$V_2(z) - z^{-1} V_2(z) = V_1(z)$$

Quindi: $$(1 - z^{-1}) V_2(z) = V_1(z) \Rightarrow V_2(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})} V_1(z);$$

$$\Downarrow$$

$$V_2(z) = \frac{z}{(z-1)} V_1(z)$$

Consideriamo invece il segnale:

$$v_3(k) = \sum_{h=0}^{k-1} v_1(h).$$

Quindi:

$$v_3(k) = v_2(k-1) \Rightarrow V_3(z) = z^{-1} V_2(z) = z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} V_1(z) \right] = \frac{1}{z-1} V_1(z)$$

Vediamo ora alcuni fatti notevoli dovuti a queste trasformate. Innanzitutto tutti i poli di $V(z)$ hanno modulo minore di 1 se e solo se $v(k)$ è a energia finita. Tutti i poli di $V(z)$ hanno modulo minore o eguale a 1, e quelli con modulo