

Quindi:

$$u(t) = \frac{h\pi}{\pi} \sum_{k \in D^+} \frac{\sin(k\pi t)}{k}$$

$$y(t) = \frac{h\pi}{\pi} \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \sin(k\pi t + \delta_k)}{k}$$

dove $G_k = |G(jk\pi)|$, $\delta_k = \angle G(jk\pi)$. Quindi:

$$y(t) = \frac{h\pi}{\pi} \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \sin(k\pi t + \delta_k)}{k}$$

Per:

$$e(t) = -y(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{h\pi} e(\pi/n) = - \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \sin(k\pi + \delta_k)}{k} = \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \sin(\delta_k)}{k} \\ \frac{\pi}{h\pi n} \dot{e}(\pi/n) = -\frac{1}{n} \sum_{k \in D^+} \frac{G_k k n \cos(k\pi + \delta_k)}{k} = \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \cos(\delta_k)}{k} \end{cases}$$

Definiamo una nuova funzione z nel seguente modo:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[z] = \operatorname{Re}[z(n)] = \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \cos(\delta_k)}{k} = \sum_{k \in D^+} \frac{\operatorname{Re}[G(jk\pi)]}{k} \\ \operatorname{Im}[z] = \operatorname{Im}[z(n)] = \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \sin(\delta_k)}{k} = \sum_{k \in D^+} \frac{\operatorname{Im}[G(jk\pi)]}{k} \end{cases}$$

Quindi le condizioni si scrivono nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4\pi} e(\pi/n) = \frac{-\pi B}{8\pi} \\ \frac{\pi}{h\pi n} \dot{e}(\pi/n) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}[z(n)] = \frac{-\pi B}{8\pi} \\ \operatorname{Re}[z(n)] < 0 \end{cases}$$

Si ricordi che nel metodo di Nyquist, si ha:

$$\operatorname{Re}[z(n)] < 0 \quad \text{cioè} \quad \left[\frac{\pi}{h\pi n} \dot{e}(\pi/n) < 0 \right]$$

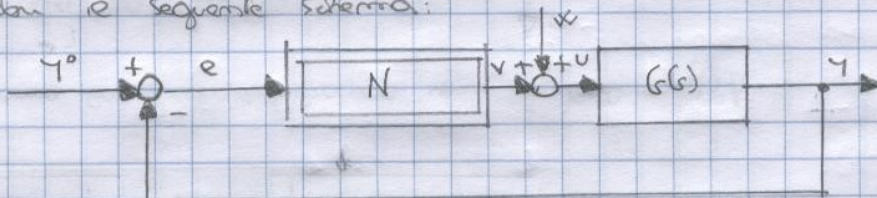
solo quando $\exists \dot{e}(\pi/n)$, cioè se:

$$\underline{g_{rel}(s) \geq 2}$$

dove $G_{rel} = g_{rel} =$ grado relativo.

Vediamo ora, qualche esempio sulle funzioni derivate.

1) Si consideri il seguente sistema:

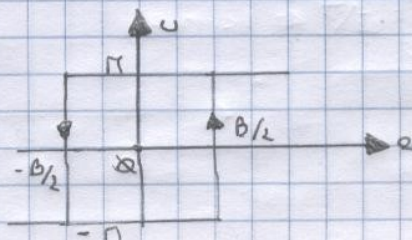


Sia N l'elemento lineare che è un $10/2$. Sia $\alpha = 0,5$ e $B=1$, mentre:

$$G(s) = \frac{2s(-0,5s+1)}{(s+1)^2(0,1s+1)}$$

Sia inoltre $r^0 = 10^0$, $\forall t = 0$.

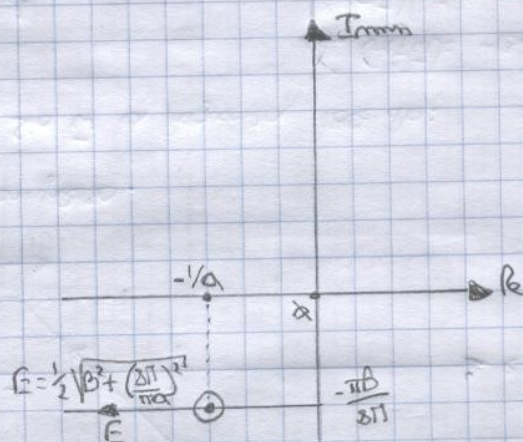
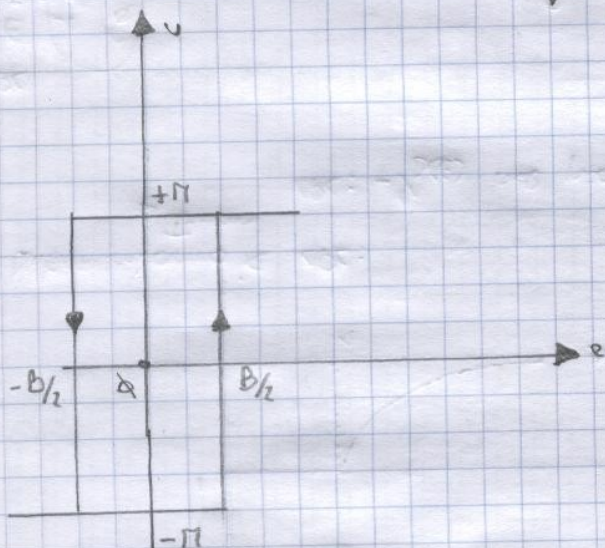
Esistono oscillazioni permanenti di valore medio nullo compatibili con il sistema?



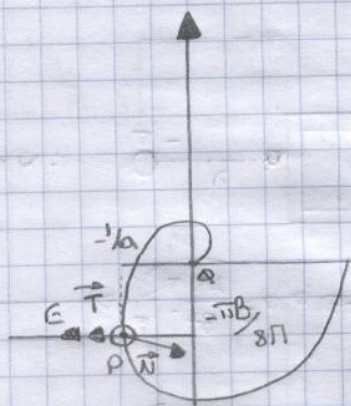
Nel caso in cui esiste un'oscillazione, calcolare ampiezza, periodo per ritenere se essa o esse sono stabili.

1) $\forall E \geq B/2$ si ha:

$$D(E) = \frac{2\pi}{\pi E^2} \left(\sqrt{4E^2 - B^2} - jB \right)$$



Dobbiamo disegnare accuratamente le diagrammi per dare risposta in frequenza.



* Po' asintoticamente stabile, ed esiste quindi un'oscillazione permanente.

Calcoliamo ampiezza e periodo:

- Al punto di intersezione, E vale circa h , e $\omega \approx 1,3$ rad/udt.

Quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 3,5 \text{ [udt]}$$



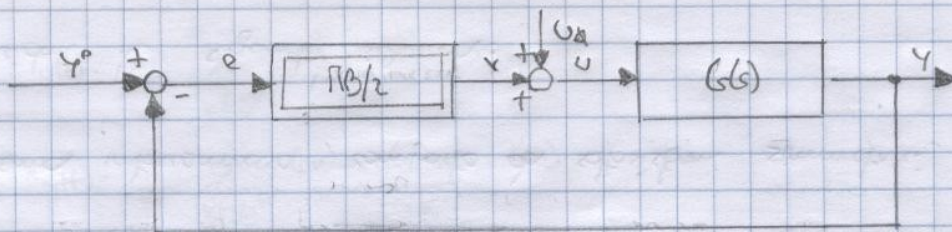
$$x(t) \approx h \cos(1,3t)$$

Si ricordi che un sistema si dice SIMMETRICO se la sua risposta periodica ad un ingresso periodico, cambia di segno quando cambia il segno del suo ingresso. Un sistema non lineare "da caratteristica" è simmetrico se e solo se la sua caratteristica è a simmetria dispari, cioè:

$$f(-u) = -f(u)$$

Un sistema interconnesso, composto da sottosistemi simmetrici, è simmetrico.

2) Si consideri il seguente schema:

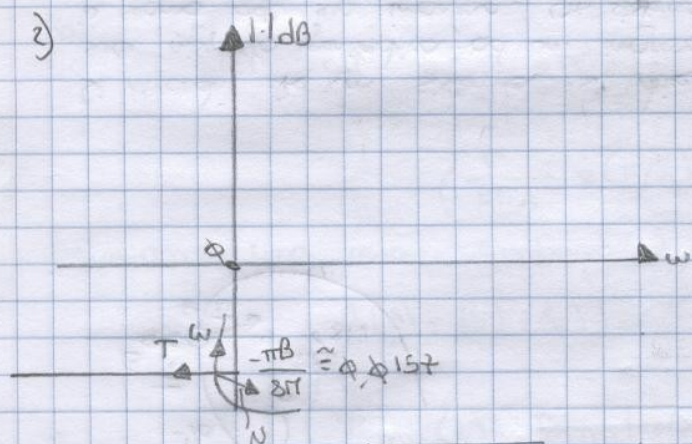


$$G(s) = \frac{\alpha_b(-\alpha_b s + 1)}{s(3s+1)}$$

$$\pi = 5, B = \alpha_b, Y^0 = 10, u_d = -\alpha_b$$

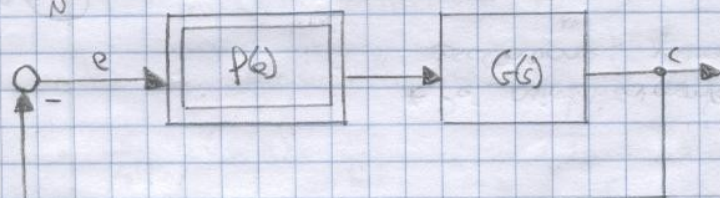
Si suppone di dover stabilire se esistono oscillazioni permanenti stabili compatibili con il sistema, verificandone la stabilità e l'alternatività.

2)



* Le oscillazioni permanenti ci sono, sono compatibili con il sistema e sono stabili.

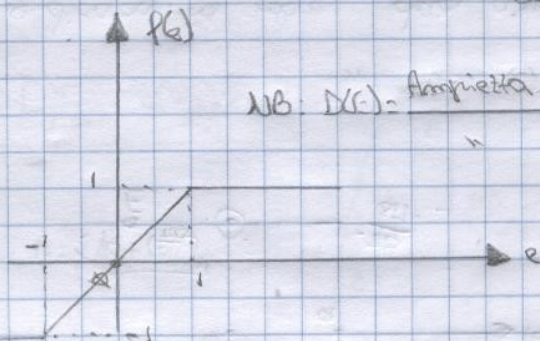
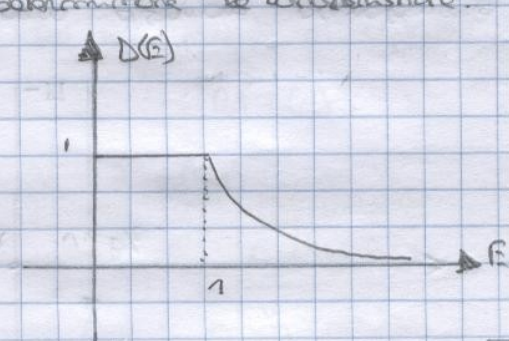
3) Sia:



$$G(s) = \frac{1(1 + 0,33s)}{s(1+s)(1+0,1s)^2}$$

Dire se per π -dB c'è una condizione di oscillazione permanente compatibile con il sistema. (E se c'è punt. descrittiva).

Se si determinano le caratteristiche. Dati:



NB: $D(\omega)$: Ampiezza 1° ord. uscita
" " " " ingresso

3) Determiniamo il LPE:

LPE: $-\frac{1}{D(\omega)}$ nel piano complesso.

Sia $\bar{\omega}$ la frequenza tale da:

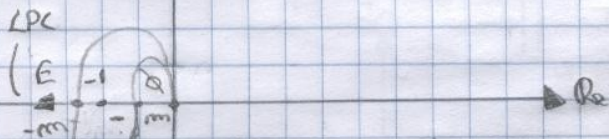
$$\angle G(j\bar{\omega}) = -180^\circ$$

$$|G(j\bar{\omega})| = m$$

Se $m < 1 \Rightarrow$ non c'è osc.

Se $m > 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = T$

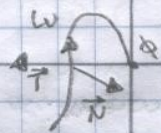
$$E = \delta^\circ (\frac{1}{m})$$



Ip: $\bar{\omega} \approx 3$
 $m \approx 3,1$
 $T \approx 0,37$
 $E \approx 5$

$\Rightarrow$ c'è oscillazione permanente

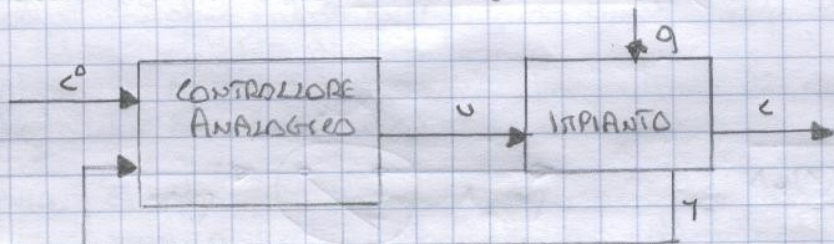
STABILE !!!



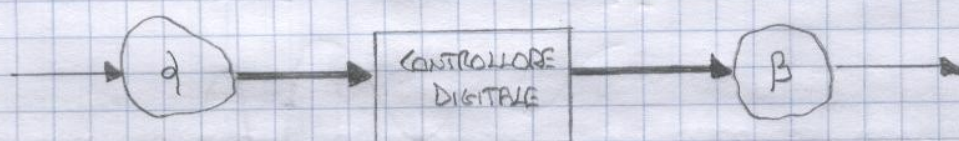
Tutti i controllori visti finora lavoravano nel continuo. Questo che vedremo ora invece riguarda i controllori digitali. Schematicamente si ha:



Effettuiamo una zoom sul controllore digitale e vediamo come esso opera.

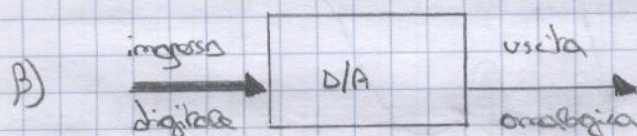
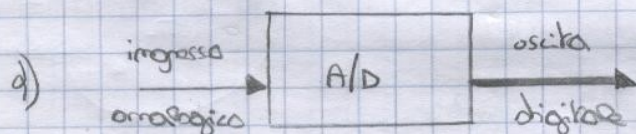


I segnali esterni sono analogici, mentre i segnali che devono giungere al controllore digitale sono digitali. Quindi:

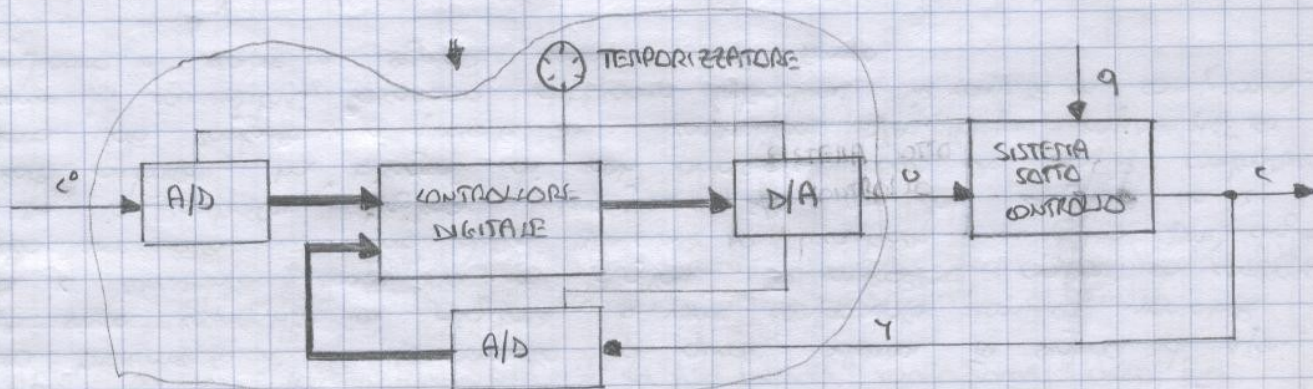


NB: $\boxed{\text{---}}$ = DIGITALE
 --- = ANALOGICO

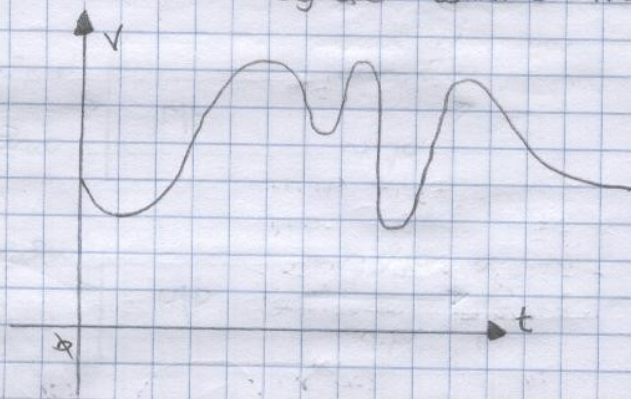
α e β sono due entità distinte. L'entità α converte una grandezza analogica proveniente dall'esterno in una grandezza digitale "masticabile" dal controllore digitale. Questa unità prende il nome di CONVERTITORE ANALOGICO/DIGITALE (A/D). Viceversa l'entità β converte una grandezza digitale proveniente dal controllore digitale in una grandezza analogica "masticabile" per l'ambiente esterno. Questa unità prende il nome di CONVERTITORE DIGITALE/ANALOGICO (D/A). Quindi:



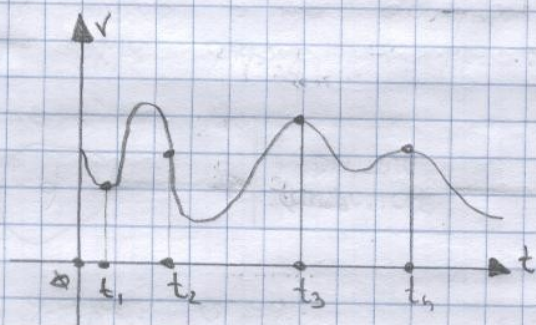
NB: Il convertitore stesso, mette a allineare di tutte le varie unità.



Spieghiamo brevemente il funzionamento di questo sistema. Il segnale di riferimento e^* viene convertito in digitale e viene confrontato con la variabile controllata e convertita anch'essa in digitale. Il controllore agisce di conseguenza fornendo in uscita il valore della variabile di controllo in forma per digitale. Si ricordi che il controllore digitale interagisce solo con dati digitali. Il sistema sotto controllo ha "bisogno" di dati analogici. Essi che ha il controllore e il sistema sotto controllo è presente un convertitore D/A. Il per capire più di fondo come i convertitori lavorano dobbiamo introdurre il concetto di campionamento. Prendiamo in esame un segnale continuo nel tempo.

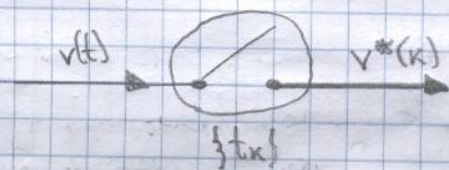


Supponiamo che in ogni istante di tempo si prelevi il valore del segnale, cioè si CAMPIONI il segnale. Supponiamo che tale campionamento avvenga in istanti di tempo casuali.



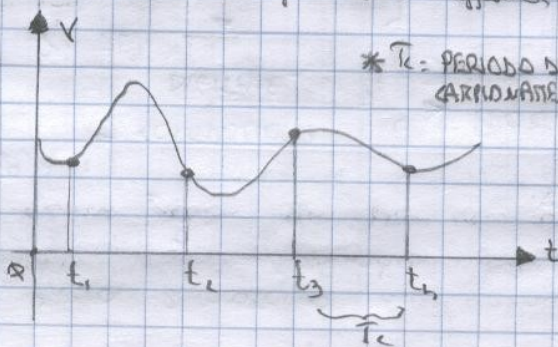
Sia $v^*(k)$ il segnale campionato.

Lo strumento che permette tale operazione si chiama CAMPIONATORE IDEALE.

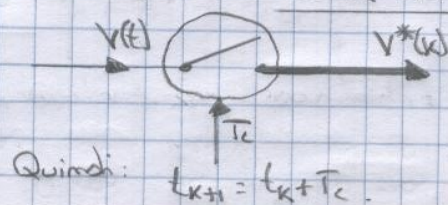


$$v^*(k) = v(t_k)$$

Come si può notare tale campionamento è casuale (aleatorio) e non avviene in tempi prestabiliti. È possibile però campionare il segnale periodicamente ottenendo un campionatore PERIODICO IDEALE. Tale campionatore effettua un campionamento periodico.



* T_c : PERIODO DI CAMPIONAMENTO. Per definizione $T_c = t_k - t_{k-1}$.



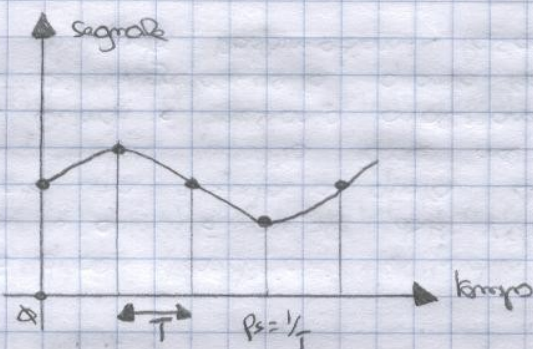
Quindi: $t_{k+1} = t_k + T_c$.

Poiché $t_k = kT_c \Rightarrow V^*(k) = v(t_k) = v(kT_c)$ Quindi assumendo abbiamo due tipi di campio-
natori. Abbiamo i campionatori ideali non periodici e i campionatori ideali periodici.
Quindi la variabile di riferimento e^* , come la variabile controllata v vengono campio-
nate.

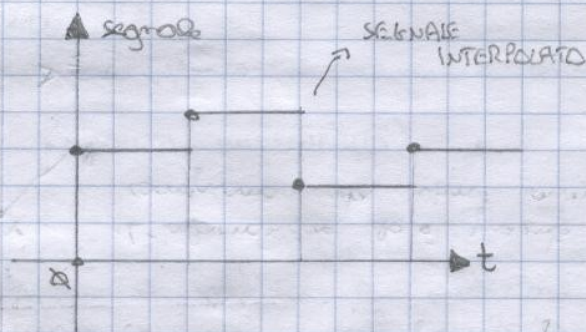


I campioni della variabile controllata vengono inviati al controllore che fornisce, a sua volta, i campioni della variabile di riferimento, e in grado di generare la relativa variabile di controllo u . Quindi la differenza tra i sistemi di controllo analogici e i sistemi di controllo digitali è che questi digitali richiedono:

- 1) CAMPIONAMENTO: Quando un segnale continuo viene campionato, il suo valore viene misurato solamente in determinati istanti di tempo. Supponiamo che l'intervallo di campionamento sia pari a T , il numero di campioni al secondo è chiamato FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO, ed è:
$$f_s = 1/T$$



- 2) INTERPOLAZIONE DEI DATI: L'azione di controllo richiesta e fornita dal controllore è costituita da una sequenza di valori digitali che deve essere convertita in un segnale analogico per il sistema sotto controllo. Questa operazione viene svolta da un qualche tipo di interpolazione tra gli istanti di campionamento.

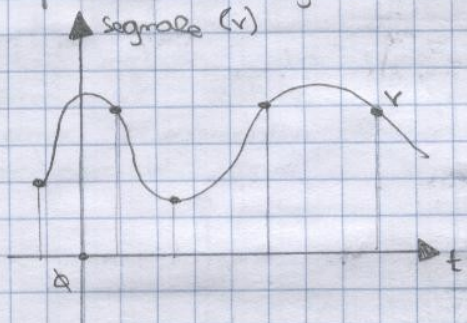


Qui i valori del campionamento sono mantenuti costanti tra un istante di campionamento e l'altro.

La RISOLUZIONE di un convertitore D/A è la più piccola variazione della sua uscita. Ad esempio per un convertitore a n bit quindi si ha:

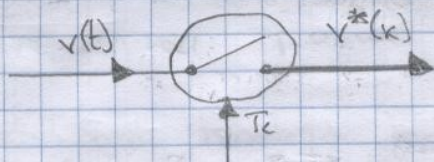
RISOLUZIONE = $\Delta t / 2^m$ %

Spesso campionare un segnale a tempo continuo comporta perdita d'informazione.



L'informazione che è presente tra ogni istante di campionamento viene irrimediabilmente persa.

Inoltre ci sono infiniti segnali a tempo continuo che campionati forniscono lo stesso segnale a tempo discreto. Inoltre dato il segnale a tempo discreto e l'istante dei campioni di campionamento, non è possibile ricostruire a priori il segnale continuo. Questo problema è noto come ALIASING. Consideriamo un campionario periodico ideale:



Ci chiediamo ora sotto quali condizioni la perdita d'informazione prodotta dal campionamento è nulla e quindi è possibile dati $v^*(k)$ e T_c determinare univocamente $v(t)$. Per poter trovare una risposta a questa domanda dobbiamo analizzare il comportamento del campionario periodico ideale nel dominio della frequenza e non nel dominio del tempo. Quindi è necessario analizzare il segnale in ingresso al campionario non fra i segnali di ingresso-uscita quanto fra le loro trasformate. Analizziamo ora alcune di queste trasformazioni. Possiamo considerare un segnale in:

- 1) SEGNALE A ENERGIA TOTALE FINITA;
- 2) SEGNALE A POTENZA MEDIA FINITA;

Vediamo il primo tipo di segnale. Immensabile energia e potenza hanno significati differenti da quelli fisici. Un segnale a energia finita è un segnale che per $t \rightarrow \infty$ va a zero abbastanza in fretta. Cioè è tale se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt < \infty$$

Un segnale invece è a potenza media finita se e solo se:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v^2(t) dt < \infty$$

Quindi questo segnale è un segnale che resta limitato. Questa categorizzazione è da fatta per i segnali continui. Possiamo fare la stessa cosa per i sistemi discreti.