

Per funzionare un poco indichiamo le equazioni di sintonizzazione devono essere rispettate, sotto e ripeteri deve essere ripetutamente, affinché esista un regime periodico compatibile con il sistema. Tali condizioni consistono in un bilancio lungo e' anche di informazione sia della componente esistente sia della componente sinusoidale corrispondente alla prima armonica del segnale. Per vediamo meglio cosa si intende per armonica del segnale. Fourier scoprì che una funzione periodica non sinusoidale poteva (anzi può) essere espressa, come una somma di infinite funzioni sinusoidali. Si riconosce che una funzione periodica è una funzione che si ripete ogni T secondi. Quindi:

$$p(t) = p(t+T) \quad T: \text{periodo}$$

Secondo la TEOREMA DI FOURIER, qualunque funzione periodica di frequenza ω si può esprimere come somma di infinite funzioni seno e coseno a frequenze multiple intere di ω . Quindi:

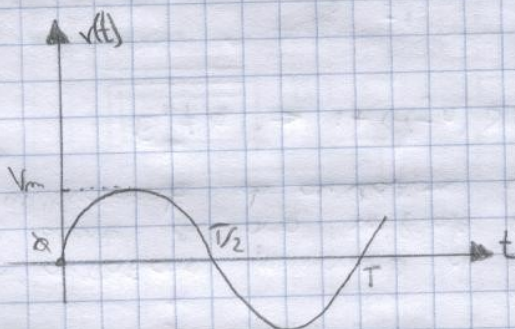
$$p(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots$$

oppure:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ è pari alla FREQUENZA FONDATALE f .

Si riconosce che data una qualunque funzione periodica, per esempio una sinusoidale:



$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

T : periodo [s]
 V_m : AMPIEZZA della sinusoidale
 ωt : argomento della sinusoidale

Appare evidente che la sinusoidale si ripete ogni T secondi di tempo. Quindi T è il periodo della sinusoidale e vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{con } \omega = \text{velocità angolare}$$

Quindi:

$$v(t+T) = V_m \sin \omega(t+T) = V_m \sin \omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) = V_m \sin(\omega t + 2\pi) = V_m \sin \omega t = v(t)$$

Perciò:

$$v(t+T) = v(t)$$

Il reciproco del periodo è la FREQUENZA e vale: $f = \frac{1}{T}$

{ NB: $\omega = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 { NB: $f = \text{Hz}$

In breve:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Perciò la frequenza rappresenta il numero di giri completati dalla sinusoidale per secondo.

Tornando al teorema di Fourier, si ha che le sinusoidi $\sin m\omega t$ e $\cos m\omega t$ sono delle onde m-esime ARMONICHE di $f(t)$. Quindi la prima armonica di $f(t)$ è $a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$. Se m è dispari a_m armoniche vengono dette dispari, altrimenti vengono dette pari. I coefficienti:

$$\begin{cases} a_m \\ b_m \end{cases} \text{ vengono detti COEFFICIENTI DI FOURIER.}$$

Attraverso una sequenza più o meno lunga di passi matematici si giunge:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \rightarrow \text{VALORE MEDIO.}$$

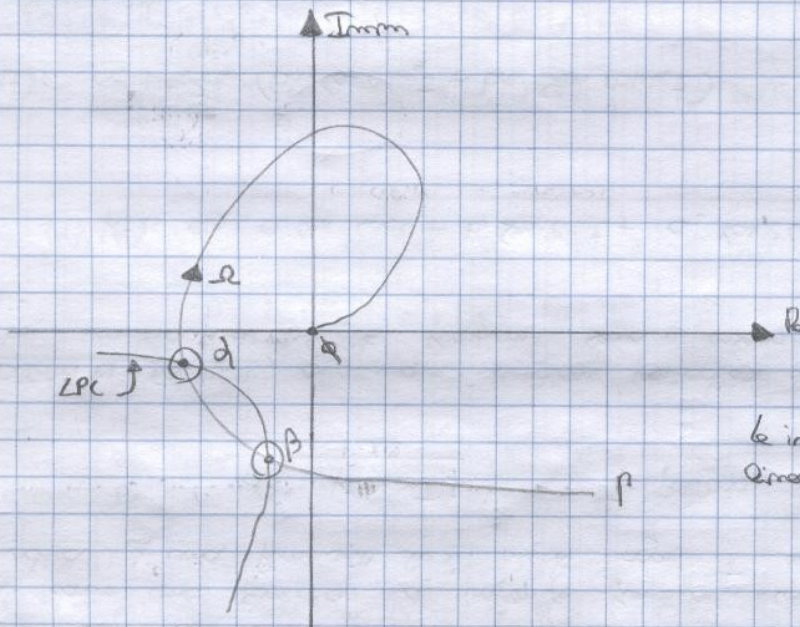
Tornando alle equazioni di congruenza si ha:

$$\begin{cases} E_0 = Y^0 - G_0(U + D_0(E_0, E_1, n) E_0) \\ E_1 = -G_1(n) D_1(E_0, E_1, n) E_1 \end{cases}$$

Quindi affinché un'oscillazione permanente del tipo: $e(t) = E_0 + E_1 \cos \omega t$ sia compatibile con il sistema dato, occorre che siano verificate le due precedenti equazioni di congruenza. Poiché per portare effettivamente l'oscillazione è necessario che:

$$\underline{E_1 \neq 0} \Rightarrow 1 + G_1(n) D_1(E_0, E_1, n) = 0 \Rightarrow G_1(n) = \frac{-1}{D_1(E_0, E_1, n)} = \frac{-1}{D_1(n(E_0), E_1)} = H_1(E_1)$$

Sia ora p la rappresentazione polare della risposta in frequenza associata a G_1 .



LPC = Locus dei Punti Critici.

NB: A e B sono i due punti di intersezione di p con LPC.

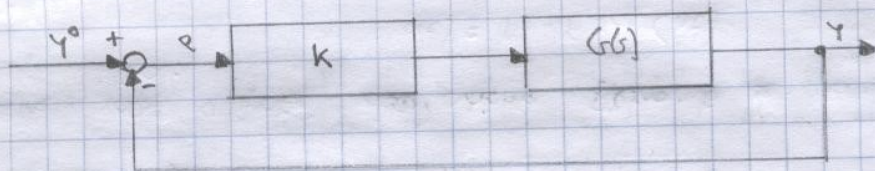
Le intersezioni di queste due curve sono le soluzioni dell'eq:

$$\underline{G_1(n) = +H_1(E_1)}$$

Sicché che la curva LPC è la rappresentazione polare di $H_1(E_1)$. Vediamo le parti di LPC. Supponiamo che esista un'oscillazione permanente compatibile con il sistema e tale da:

$$\underline{e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t)}$$

La soluzione è la seguente:

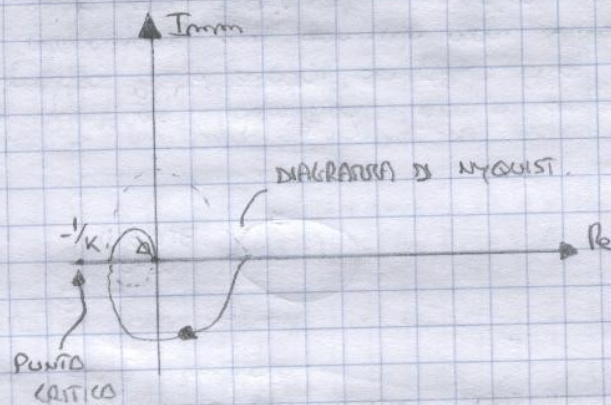


Scriviamo le relative eq. di congruenza:

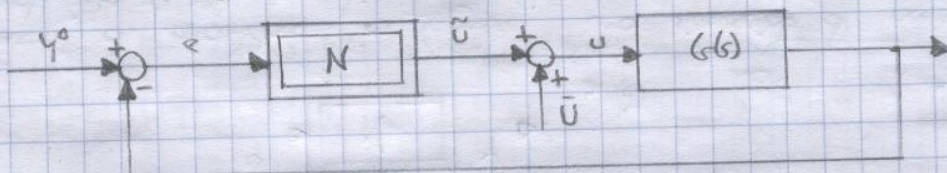
$$1) E_0 = Y^0 - K G_0 E_0 \Rightarrow E_0 = \frac{Y^0}{1 + K G_0}$$

$$2) E_1 = -K G(j\omega) E_1 \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{Y^0}{K E_1}$$

Quindi:



Consideriamo ora le seguenti schemi a blocchi:



Sia:

$$d(t) = E \cos(\omega t)$$

nel caso che $\omega_0 \ll \omega_1$.

e quindi l'equazione di congruenza relativa è:

$$E = -G(j\omega) D(E, \omega) E$$

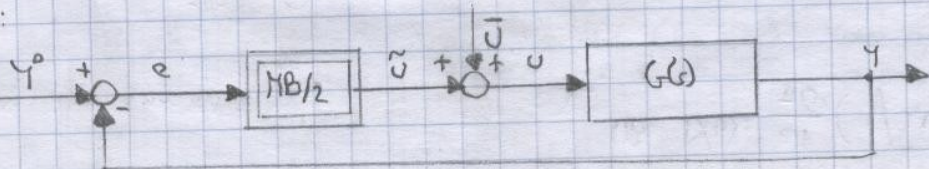
$$G(j\omega) = -\frac{1}{D(E, \omega)}$$

Se N è "di caratteristica" si ha:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{D(E)} = H(E)$$

→ Questa è la luogo dei punti critici.

Ad esempio:



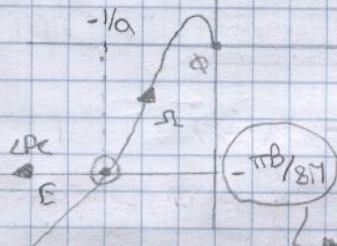
* Qui il punto non lineare è un $1/s$.

Quindi:

in cui ω_1 è la frequenza di risonanza del sistema.

$$NB: H(j\omega) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} - j \frac{\omega}{\omega_n^2} \right) \rightarrow \text{Immm}$$

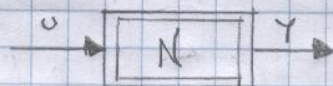
$$NB: D(u) = \frac{2\pi}{\pi u^2} \left(\sqrt{1 - u^2} - j u \right), \quad u \geq \frac{B}{2}$$



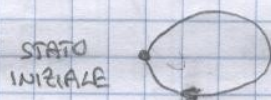
$$\bar{E} = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 + \left(\frac{2\pi}{\pi a} \right)^2}$$

→ si vede cosa fine degli appunti.

Ritorniamo quanto visto prima sulle funzioni descrittive. L'obiettivo della funzione descrittiva o mappa è l'obiettivo del metodo della funzione descrittiva, è quello di analizzare un sistema non lineare, e studiare la stabilità delle oscillazioni permanenti. Si ha quindi l'estensione della risposta in frequenza anche al caso non lineare. Ci chiediamo se esistono una o più oscillazioni permanenti per quel sistema. Ci chiediamo se tale oscillazione è stabile. Se io perturbo un movimento del sistema, questo torna allo stato iniziale? Ritorniamo e dimostriamo non lineare:



Immaginiamo di mandare in ingresso una sinusoide di ampiezza U o pulsazione ω . Si noti che la risposta di un sistema dinamico non dipende solo dall'ingresso, essa dipende anche dallo stato iniziale. La risposta periodica è quella risposta che, fissato l'ingresso, torna un valore dopo stato iniziale tale per cui il sistema torna allo stesso stato iniziale.



Il metodo della funzione descrittiva non è un metodo esatto, ma viene usato molto nella pratica ed è molto semplice. Esso serve a studiare la stabilità di un sistema a retroazione con elementi non lineari, in presenza di oscillazioni permanenti. Se esiste un movimento periodico del sistema si ha:

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t + \beta_1) + \sum_{k=2}^{\infty} U_k \cos(k\omega t + \beta_k)$$

$$\text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

ARMONICHE SUCCESSIVE

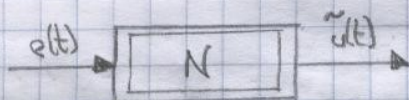
$$\text{dove: } \begin{cases} G_k = |G(jk\omega)| \\ \gamma_k = \angle G(jk\omega) \end{cases}$$

$$e(t) = G_0 U_0 + G_1 U_1 \cos(\omega t + \beta_1 + \gamma_1) + \sum_{k=2}^{\infty} G_k U_k \cos(k\omega t + \beta_k + \gamma_k)$$

Se inoltre tale è ipotesi dell'azione periodica e ponendo opportunamente β zero del coseno si ha:

$$e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t)$$

Quindi:



NB: la fase sparisce perché prende per convenienza lo zero dei tempi.

Si noti che $\tilde{u}(t)$ è caratterizzato da un valore medio:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}(t) dt$$

da un'ampiezza data prima armonica, ottenuto dall'angolo. Bisogna vedere ora come le variabili medie e l'ampiezza della 1° armonica dipendono da E_0, E_1, n . Definisco le funzioni descrittive della 1° armonica e del valore medio (a duplice ingresso).

$$\begin{cases} \tilde{u} = D_0(E_0, E_1, n) E_0 \rightarrow \text{per valore costante;} \\ \tilde{u} = D_1(E_0, E_1, n) \cdot E_1 \rightarrow \text{per la 1° armonica;} \end{cases}$$

Quindi si hanno le seguenti equazioni di congruenza:

$$\begin{cases} E_0 = \tilde{u} - (D_0(E_0, E_1, n) \cdot E_0) G_0 \\ E_1 = -G_1(j\omega) \cdot D_1(E_0, E_1, n) \cdot E_1 \end{cases}$$

Abbiamo poi visto il caso particolare in cui:

$$E_0 \ll E_1 \Rightarrow e(t) = E_1 \cos(\omega t)$$

Questo caso è particolare perché siamo interessati al valore medio dell'oscillazione molto piccola. Quindi si ha:

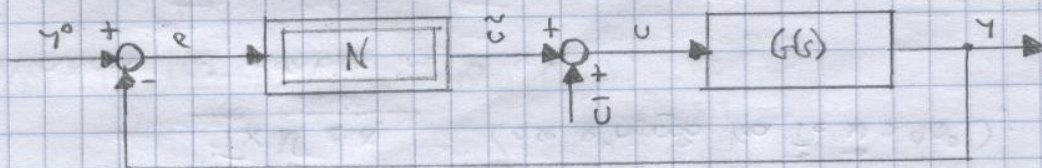
$$E_1 = -G_1(j\omega) \cdot D(E, n) \cdot E \quad (\text{funzione descrittiva a singolo ingresso})$$

Si ricordi che se l'elemento non lineare è "da caratteristica", allora la funzione descrittiva non dipende da n , e quindi:

$$E_1 = -G_1(j\omega) \cdot D(E) \cdot E \Rightarrow 1 = -G_1(j\omega) \cdot D(E)$$

$$\Downarrow \\ G(j\omega) = \frac{1}{D(E)}$$

Noi sappiamo che la stabilità riguarda un movimento periodico ma non è ispettabile. Se a piccole perturbazioni corrispondono piccole deviazioni dal movimento, allora si parla di stabilità, altrimenti no. Consideriamo ora il seguente schema:



Ipotesizziamo che N sia "da caratteristica" e che $(E_0 \approx 0)$. Vale quindi l'ipotesi dell'azione piezometrica. Sia:

$$(E, n)$$

una soluzione dell'equazione $G(j\omega) = H(E)$. Sia P il corrispondente punto di intersezione di p con $2PC$. Sia T il vettore tangente in P a $2PC$, e sia orientato nel senso della E crescente. Sia N un vettore normale in P a p , orientato verso destra per

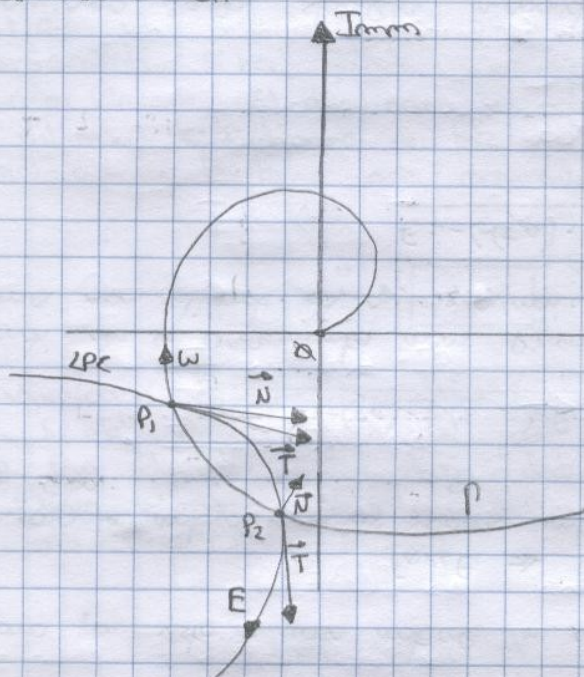
chi perisce p nel senso delle w crescenti. Supponiamo che ci sia un'oscillazione permanente e che abbiamo trovato, e in corrispondenza ad essa abbiamo trovato un'ampiezza e una pulsazione w . Immaginiamo di fornire una perturbazione all'ampiezza e all'oscillazione trovata. Troviamo un'equazione differenziale dove ampiezza e pulsazione sono funzioni del tempo. Quindi la stabilità delle oscillazioni può essere ricondotta allo studio di questa equazione. Tornando a noi, l'oscillazione corrispondente a P può ritenersi stabile se:

$$\vec{T} \times \vec{N} < 0 \quad (\text{se l'angolo tra } \vec{T} \text{ e } \vec{N} > 90^\circ);$$

Invece l'oscillazione è instabile in P se:

$$\vec{T} \times \vec{N} > 0$$

Graficamente si ha:



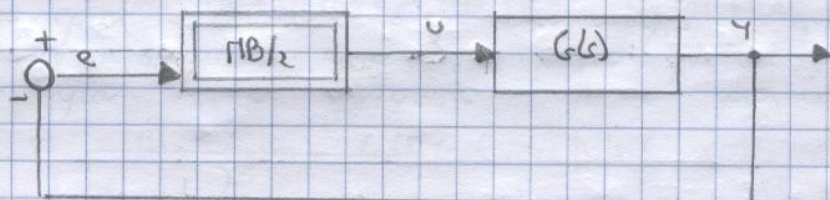
$\begin{cases} P_1 = \text{instabile} \\ P_2 = \text{stabile} \end{cases}$

NB: $p = p(jw)$

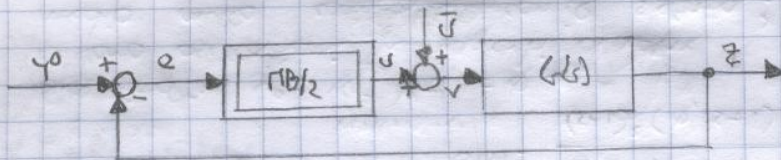
Per definizione:

- $G(jw) = G(s)$
- $-1/XE = LPC$

Si ricordi che il luogo dei punti critici è una curva nel piano complesso. Essa è punteggiata in E in ampiezza. Se le due curve si intersecano può esserci (ma non è certo a causa dell'azione perturbante) un regime oscillatorio (oscillazione periodica) di $e(t)$ con frequenza $\bar{\omega}$ e ampiezza $\bar{E}$. Introduciamo ora un metodo euristico usato per sistemi razionali con elementi non lineari "da caratteristica" del tipo "a commutazione". Questo metodo è noto come METODO DI ZIPKIN. Supponiamo che il sistema sia libero, cioè non abbia ingressi.

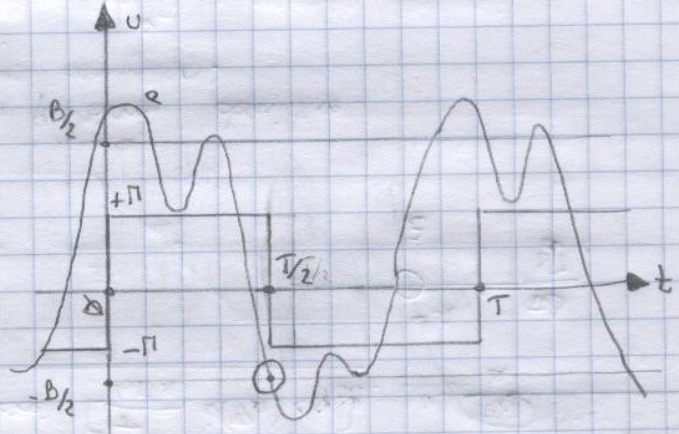
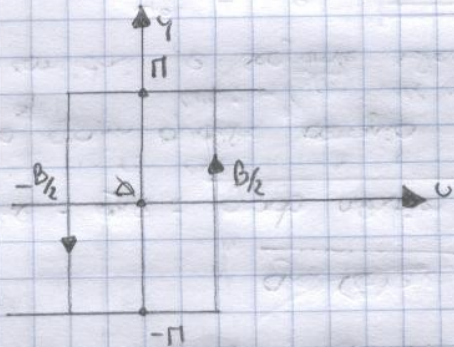


Questo sistema è equivalente al seguente:



Se: $G(s)\bar{u} = y^0$ con $y(t) = z(t) - G(s)\bar{u}$

Noi conosciamo la caratteristica di un controllore $\pi B/2$.



Con queste oscillazioni di u ed e che in un periodo non presentano più di due oscillazioni. Se andiamo a cercare di oscillazioni simmetriche con 2 oscillazioni per periodo (u commuta 2 volte), si ottiene una onda rettangolare. Sul fronte di salita inizia il periodo, e a metà periodo u commuta da $+\pi$ a $-\pi$. Quindi:

$$\begin{cases} e(T/2) = -B/2 \\ \dot{e}(T/2) < 0 \end{cases}$$

NB: il sistema è simmetrico.

NB: $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

Faremo lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda rettangolare u si ha:

$$u(t) = \frac{4\pi}{\pi} \sum_{k \in D^+} \frac{\sin(k\pi t)}{k} \quad \text{con } D^+ = \left\{ \begin{array}{l} \text{interi positivi} \\ \text{dispari} \end{array} \right\}$$

Impatti:

$$D(u) = \frac{2\pi}{\pi u^2} (\sqrt{4u^2 - B^2} - jB), \quad \bar{E} = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 + \left(\frac{2\pi}{\pi a}\right)^2}$$

con

$$-\pi B/2\pi \text{ per } P(k_2) = 0 \Rightarrow D(u)e(\pi/\Omega) = \frac{-\pi B}{2\pi}$$

$$e(\pi/\Omega) \cdot \frac{2\pi}{\pi u^2} (\sqrt{4u^2 - B^2} - jB) = \frac{-\pi B}{2\pi}$$

Analizziamo:

$$\pi/4\pi \dot{e}(\pi/\Omega) < 0$$

