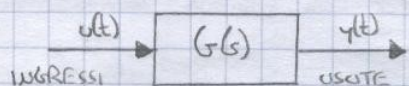


Uno schema a blocchi è uno schema utilizzato per rappresentare un oggetto reale. L'elemento base di uno schema a blocchi è il blocco. Un blocco può essere rappresentato tramite una scatola (Black Box) di cui all'interno non si sa nulla.

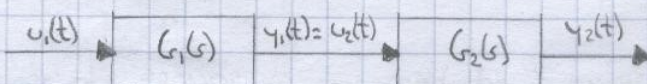


La variabile $u(t)$ rappresenta l'ingresso del blocco, mentre la variabile $y(t)$ rappresenta l'uscita dallo stesso.

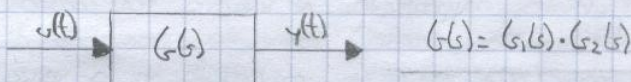
$G(s)$ viene detta FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ed è tale che: $y(t) = G(s)u(t) \Rightarrow G(s) = \frac{y(t)}{u(t)}$. Se $y(t)$ e $u(t)$ sono costanti si ha che: $y = y(t)$ e $u = u(t)$ e quindi il rapporto: $\frac{y}{u} = \pi$ dove π viene definito GUADAGNO del blocco. Due o più blocchi possono venire collegati tra loro in tre modi differenti:

- 1) CASCATA
- 2) PARALLELO
- 3) RETROAZIONE

Vediamo il collegamento in cascata:

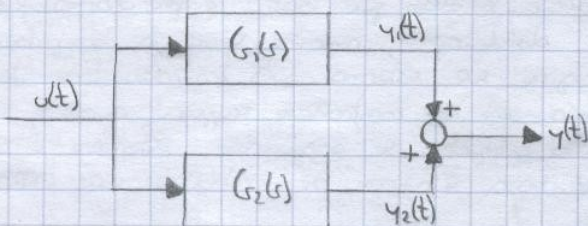


Questo schema può essere semplificato utilizzando un unico blocco con funzione di trasferimento $G(s)$ tale che:

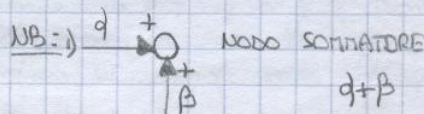


$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Vediamo ora il collegamento in parallelo:

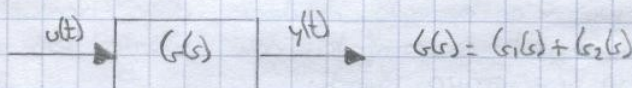


$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

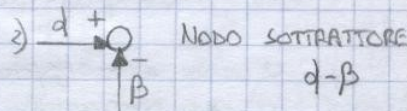


NODO SOMMATTORE
 $d + \beta$

Anche questo schema può essere semplificato in questa modo:

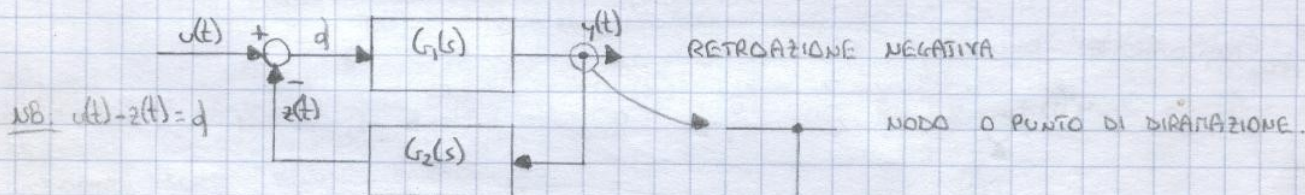


$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$



NODO SOTTRATTORE
 $d - \beta$

Analizziamo infine il collegamento in retroazione:

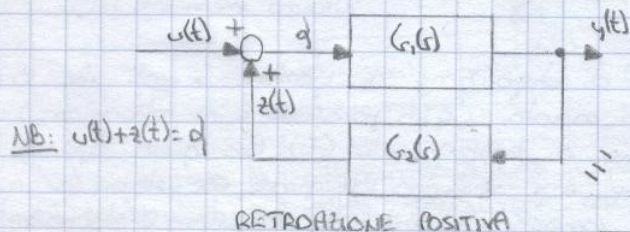


RETROAZIONE NEGATIVA

NODO O PUNTO DI DIRAMAZIONE.

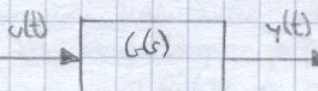
Oltre alla retroazione negativa, esiste un altro tipo di retroazione:

Lo schema a blocchi equivalente è:



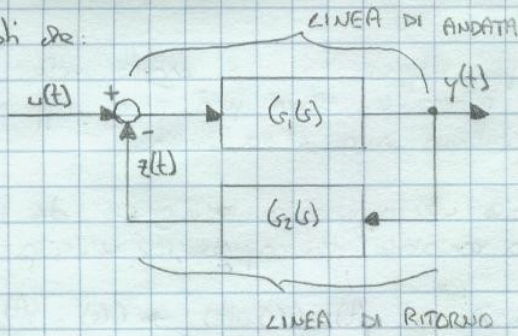
RETROAZIONE POSITIVA

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



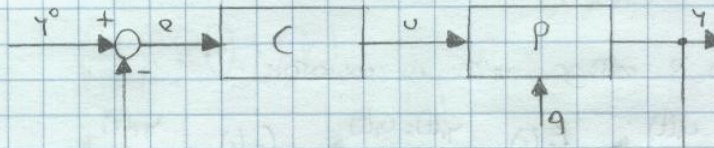
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

Simboli de:



Il sistema retroazionato permette di avere traccia dell'andamento reale del sistema permettendo un possibile cambiamento dello stesso.

Un esempio di sistema retroazionato è il seguente:



IPOTIZZAZIONE CLASSICA DEL PROBLEMA DI CONTROLLO.

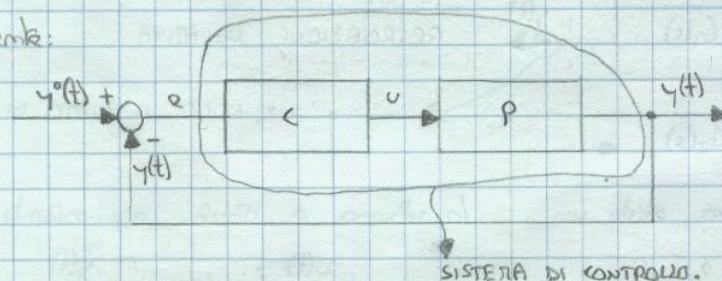
Simboli che il blocco C identifica un CONTROLLORE. La variabile u prende il nome di VARIABILE DI CONTROLLO, mentre la variabile y prende il nome di VARIABILE CONTROLLATA. Il blocco P denota il SISTEMA SOTTO CONTROLLO. Per esempio se vogliamo controllare la temperatura in una stanza, quest'ultima rappresenta il sistema sotto controllo, e quindi possiamo pensare al flusso di aria che entra nella stanza come alla variabile di controllo (u) mentre la temperatura interna alla stanza come alla variabile controllata y. La variabile q rappresenta l'eventuale (o gli eventuali) disturbo. La variabile y^0 rappresenta la VARIABILE DI RIFERIMENTO e rappresenta il nostro desiderio circa la variabile controllata. Per essere più esatti se prendiamo l'esempio della stanza, y^0 è la temperatura che noi desideriamo, mentre y è la temperatura effettiva presente nella stanza. Il controllore agisce sul sistema sotto controllo tramite la variabile di controllo u. Ma per fare ciò è necessario che il controllore sappia quale è la temperatura presente nella stanza, in modo da poter decidere se aggiungere ulteriore aria calda o aria fredda alla stanza. Il controllore basa l'azione di controllo sull'ERRORE e definito come:

$$e = y^0(t) - y(t)$$

Quindi più l'errore è maggiore e più l'andamento desiderato della variabile controllata si discosta dal suo andamento reale. Il sistema composto dal sistema sotto controllo e il controllore prende il nome di SISTEMA DI CONTROLLO. Quindi:

SISTEMA DI CONTROLLO = CONTROLLORE + SISTEMA SOTTO CONTROLLO

Graficamente:



$$y^0(t) - y(t) = e$$

Simboli che in questo caso la linea di andata ha due blocchi (2 per l'esattezza), mentre quella di ritorno non ne ha.

Abbiamo visto prima il modo di blocchi e di disposizione di blocchi. Simboli che il sistema a blocchi costituito da due o più blocchi in cascata (o in parallelo o in retroazione) può essere ridotto ad un unico blocco con funzione di trasferimento $G(s)$. Però questo tipo di equivalenza è un'equivalenza STRUTTURALE. Siccome noi vorremo verificare la stabilità o meno del sistema di controllo, e in particolare del controllore, dovremo descrivere le equivalenze tra blocchi anche a livello di stabilità.

Per fare ciò dobbiamo dire cosa è la stabilità. Prendiamo in esame la seguente formula:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \psi(t) \cdot u(t) \rightarrow \text{FORMULA DI LAGRANGE.}$$

La formula di Lagrange mette in mostra come lo stato del sistema all'istante t dipenda dallo stato iniziale $x(0)$ dello stesso e dall'ingresso $u(t)$. Tale formula dice anche che lo stato $x(t)$ del sistema dipende dalla sommatoria di due movimenti: il movimento libero e il movimento forzato. Quindi:

$$\begin{cases} \Phi(t)x(0) = \text{MOVIMENTO LIBERO} \\ \psi(t)u(t) = \text{MOVIMENTO FORZATO} \end{cases}$$

Dunque un sistema lineare è asintoticamente stabile quando $\forall x(0)$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)x(0) = 0$$

Quindi la stabilità si riferisce soltanto al movimento libero ed in particolare alla matrice A . Si ricordi che un sistema lineare viene visto matricialmente nella seguente maniera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con } \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad (\text{SISTEMA CONTINUO})$$

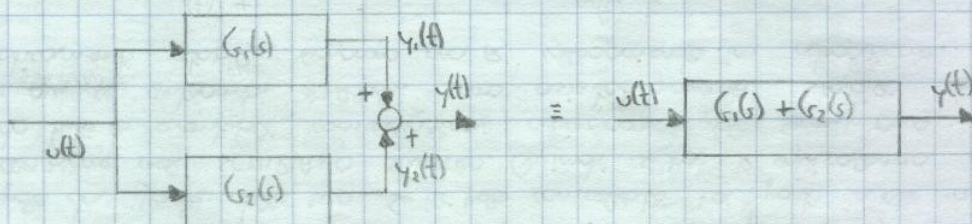
$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{SISTEMA DISCRETO})$$

Si noti inoltre che la stabilità non dipende dal particolare ingresso preso in considerazione. Si noti inoltre che noi prenderemo in considerazione l'esterna stabilità. Rivediamo quindi quanto appena detto sui blocchi in cascata, in parallelo, in retroazione, ma' oltre alla stabilità. Ricordandosi che un sistema è esternamente stabile se e solo se i poli della funzione di trasferimento sono stabili, e che condizione necessaria e sufficiente perché un sistema sia esternamente stabile e che sia asintoticamente stabile se la sua parte raggiungibile - osservabile, si ha che due o più blocchi posti in parallelo sono equivalenti ad un unico blocco, onde dal punto di vista della stabilità, se e solo se tutti i poli comuni a $G_1(s)$ e $G_2(s)$ hanno parte reale negativa. Prendiamo in considerazione la funzione di trasferimento generica $G(s)$.

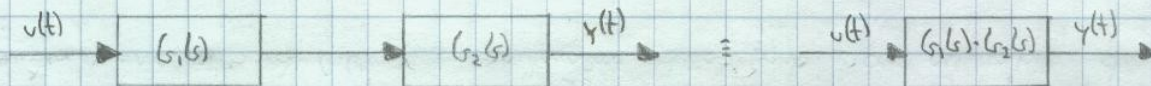
Siccome:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{si ha che un polo di } G(s) \text{ è una radice di } D(s), \text{ mentre uno zero di } G(s) \text{ è una radice di } N(s).$$

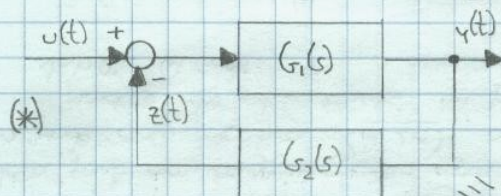
gli autovalori della parte non raggiungibile - non osservabile sono i poli comuni a $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Se tali poli hanno parte reale negativa ($\text{Re} < 0$), allora è equivalente a onde a livello di stabilità. Si ricordi inoltre che due blocchi in parallelo formano un sistema stabile se entrambi sono stabili. Quindi:



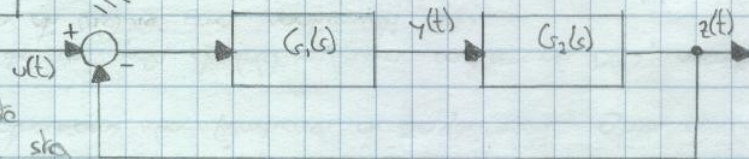
Vediamo ora le collegamenti in cascata. Ogni polo di $G_2(s)$ che coincide con uno zero di $G_1(s)$ è un autovalore della parte non raggiungibile del sistema. Ogni polo di $G_1(s)$ che coincide con uno zero di $G_2(s)$ è un autovalore della parte non osservabile del sistema. Quindi:



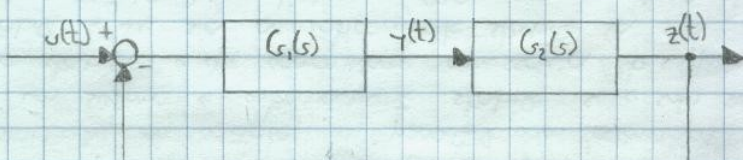
Quando un polo di una delle due funzioni di trasferimento dei due blocchi in cascata coincide con uno zero dell'altra, avviene un'operazione nota come **CANCELLAZIONE** del polo da parte dello zero. Se il polo cancellato ha parte reale negativa, si ha una cancellazione nel SEMIPIANO SINISTRO. Quindi si ha l'equivalenza a livello di stabilità quando tutte le eventuali cancellazioni avvengono nel semipiano sinistro. Si noti che anche qui se entrambi i blocchi sono asintoticamente stabili, il sistema complessivo è asintoticamente stabile. Vediamo ora le configurazioni in retroazione.



Siccome la stabilità non dipende dalla particolare realizzazione di uscita si ha:



Quindi il sistema (*) è asintoticamente stabile se e solo se è asintoticamente stabile il sistema (**). Quindi si ha:

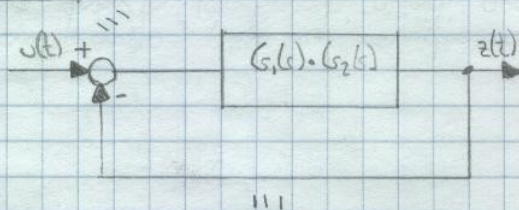


Dunque se il sistema (**) ha $G_1(s)$ e $G_2(s)$ con le eventuali cancellazioni avvengono nel semipiano sinistro, si ha l'equivalenza in termini di stabilità dei vari sistemi mostrati qui a lato.

Potremo:

$$L(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \rightarrow G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{NG(s)}{DG(s) + NG(s)}$$

con: $L(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{NG(s)}{DG(s)}$



si ha l'asintotica stabilità se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa. Quindi l'asintotica stabilità di un sistema retroattivo richiede che non ci siano zeri e poli in dritta, che cancellazioni si avvengano a sinistra, e che tutte le radici dell'equazione:

$$NG(s) + DG(s) = 0$$

abbiano parte reale negativa. Si noti però che l'equivalenza tra i vari blocchi è in termini di struttura e non di stabilità. Si noti inoltre che le uscite sono differenti. Siccome la funzione di trasferimento deve essere sufficiente a rappresentare la stabilità del sistema, e poiché la p.d.t. (funzione di trasferimento) descrive la parte raggiungibile e osservabile di un sistema, bisogna che le parti non raggiungibili o non osservabili del sistema siano asintoticamente stabili. Se le uscite differiscono, differiscono anche le p.d.t., e quindi la scelta di stabilità va in malora. Se gli autovalori delle parti non raggiungibili e non osservabili sono nel semipiano sinistro, ossia il sistema si dice **STABILIZZABILE**. Vediamo ora di analizzare anche l'equivalenza tra blocchi anche in termini di stabilità.

Ogni polo di $G_2(s)$ che coincide con uno zero di $G_1(s)$ è un autoreattore della parte non raggiungibile o non assemblabile del sistema $(**)$. Ogni polo di $G_1(s)$ che coincide con uno zero di $G_2(s)$, è un autoreattore della parte raggiungibile e assemblabile del sistema, e quindi è un polo della funzione di trasferimento:

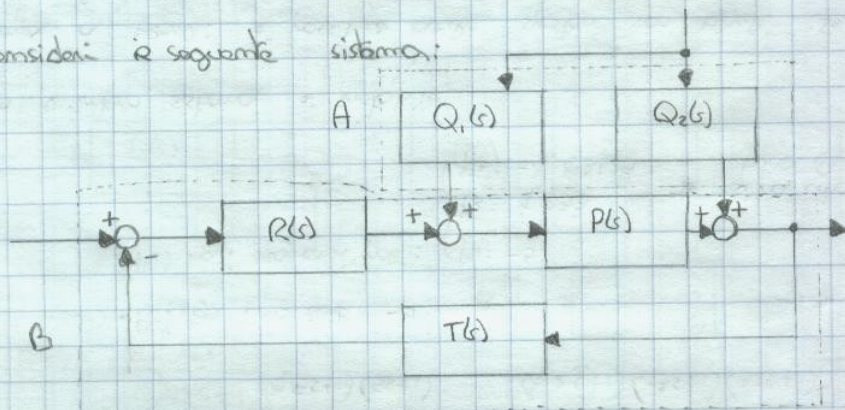
$$\tilde{G}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad \text{che è differente dalla } G(s) \text{ del sistema } (**).$$

Si noti che:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \frac{N_1(s)/D_1(s)}{1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{\frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)} \\ G(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)}}{1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{\frac{N_1(s) \cdot N_2(s)}{D_1(s) \cdot D_2(s)}}{1 + \frac{N_1(s) \cdot N_2(s)}{D_1(s) \cdot D_2(s)}} = \frac{\frac{N_1(s) \cdot N_2(s)}{D_1(s) \cdot D_2(s)}}{\frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} \\ &= \frac{N_1(s) \cdot N_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)} \quad \text{e quindi i due sono effettivamente differenti.} \end{aligned}$$

Quindi perché il sistema $(*)$ sia equivalente a quanto di stabilità del sistema $(**)$, è necessario che nessun polo di $G_2(s)$ con parte reale non negativa sia cancellato da un uguale zero di $G_1(s)$. Facciamo qualche esempio:

1) Si consideri il seguente sistema:



DATI:

$$Q_1(s) = \frac{0,01(-3s+1)}{0,01s^2 + 0,02s+1}$$

$$Q_2(s) = \frac{125}{(25s+1)^2}$$

$$R(s) = \frac{0,02(-3s+1)}{(0,5s+1)(s+1)}$$

$$T(s) = \frac{0,5}{0,1s+1}$$

$$P(s) = \frac{6(s+1)}{(0,25s+1)(-3s+1)(25s+1)^2}$$

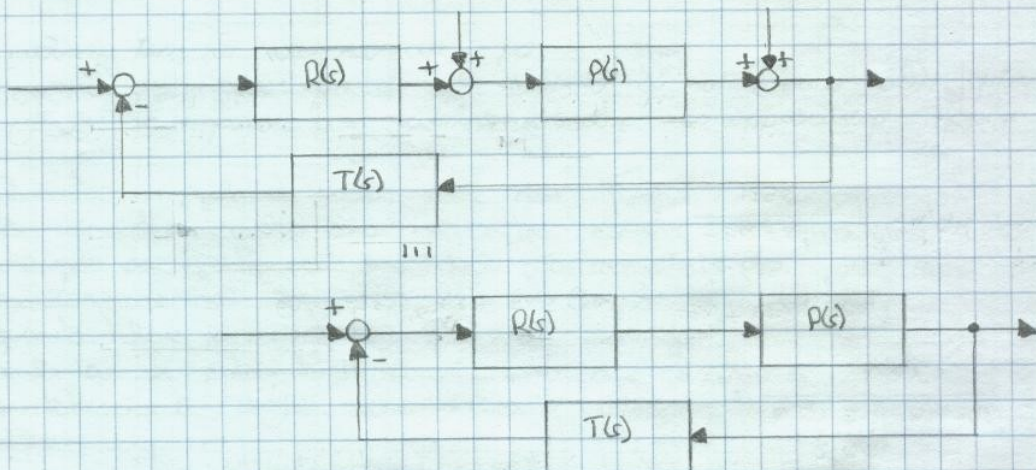
Analizziamo il sistema a livello di stabilità.

Il sistema complessivo è asintoticamente stabile se e solo se il sottosistema A e il sottosistema B. Il sottosistema A è stabile e sia il blocco Q_1 che il blocco Q_2 sono asintoticamente stabili, in quanto:

$$\begin{aligned} Q_1: 0,01s^2 + 0,02s + 1 \Rightarrow s &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,02 \pm \sqrt{0,0004 - 0,04}}{2 \cdot 0,01} \\ &= \frac{-0,02 \pm \sqrt{-0,0396}}{0,02} = \text{poli coniugati con parte reale negativa, } (-0,02). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2: 625s^2 + 1 + 50s \Rightarrow s &= \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 2500}}{2 \cdot 625} = \frac{-50 \pm 0}{1250} = -0,04 \rightarrow \text{reale negativo.} \end{aligned}$$

Quindi il sistema A è complessivamente asintoticamente stabile. Osserviamo ora il sistema B. Ricordandoci che la stabilità di un sistema non dipende dai tipi di ingressi presi in considerazione si ha:



Si noti che in quest'ultimo sistema $R(s)$, $P(s)$ sono in cascata e quindi:



Quindi:

$$R(s) \cdot P(s) = \frac{0,02(-3s+1)}{(0,5s+1)(5s+1)} \cdot \frac{6(s+1)}{(0,2s+1)(-3s+1)(32s+1)^2}$$

• $P(s)$ ha uno zero: -1

• $P(s)$ ha i seguenti poli:

$$\begin{cases} p_1 = -5 \\ p_2 = 0,333 \\ p_3 = -0,03125 \end{cases}$$

→ • $R(s)$ ha una zero pari a $0,333...$

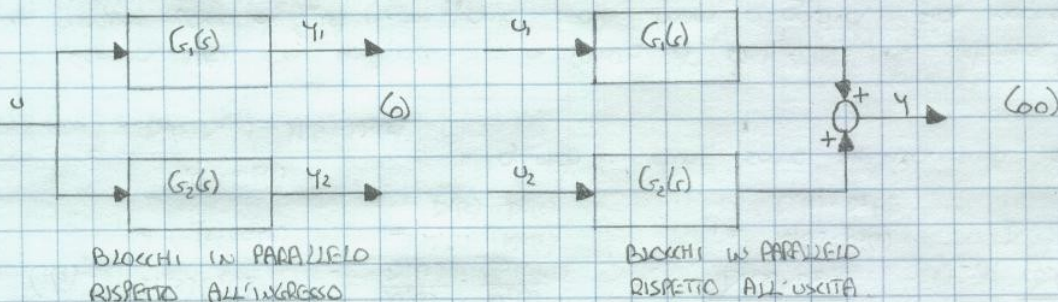
• $R(s)$ ha i seguenti poli:

$$\begin{cases} p_1 = -2 \\ p_2 = -0,2 \end{cases}$$

⇒ si ha una cancellazione nel semipiano destro. Quindi il sistema è instabile.

Concludendo l'intero sistema è instabile.

In uno schema a blocchi è possibile anche spostare vari blocchi secondo regole specifiche. Prendiamo insieme il seguente caso:



Ogni polo comune a $G_1(s)$ e $G_2(s)$ è un autovalore della parte non raggiungibile del sistema (a) e della parte non osservabile del sistema (b).

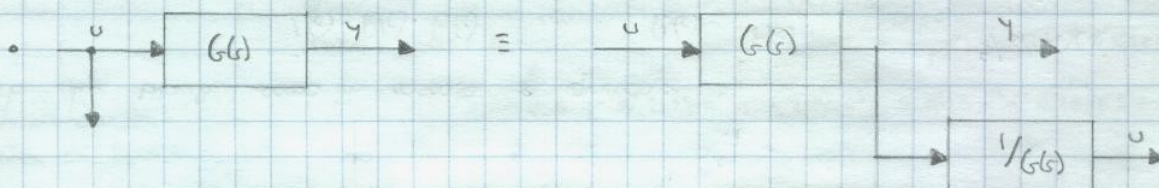
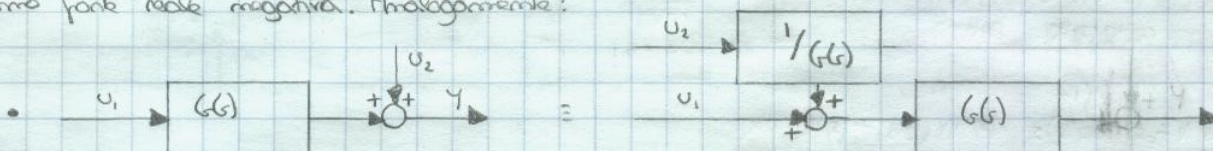


Perciò questi due blocchi sono equivalenti anche dal punto di vista della stabilità e necessario che tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa.

Se prendiamo:

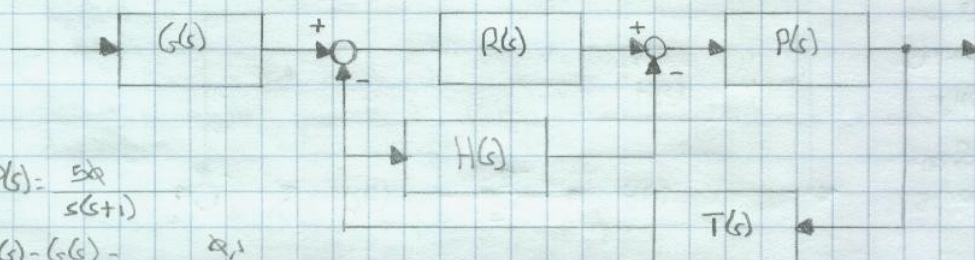


Questi sistemi sono equivalenti anche a livello di stabilità se e solo se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa. Analogamente:



Questi sistemi qui sopra sono equivalenti anche dal punto di vista della stabilità se e solo se tutti gli zeri di $G(s)$ hanno parte reale negativa. Vediamo ora qualche esempio:

1) Si consideri:



DATI:

$$P(s) = \frac{5s}{s(s+1)}$$

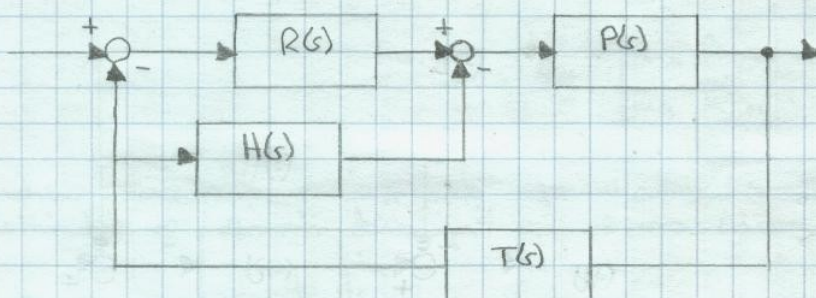
$$T(s) = G(s) = \frac{0,1}{0,02s+1}$$

$$R(s) = \frac{2(3,2s+1)}{s}; \quad H(s) = \frac{0,8s}{0,01s+1}$$

Si noti che il blocco $G(s)$ è in cascata con il resto dello schema. Si noti inoltre che $G(s)$ è tale che:

$$0,02s+1=0 \Rightarrow -\frac{1}{0,02} = s = -50$$

Quindi il polo di $G(s)$ ha parte reale negativa, e quindi il blocco è asintoticamente stabile. Perché tutto lo schema sia asintoticamente stabile, è necessario che anche la restante parte dello schema lo sia. Quindi:



Si come la stabilità non dipende dalla uscita si ha:

