Riprendiamo in considerazione quanto visto fino ad ora e vediamo un esempio:

- Ho una sonda spaziale distante $L = 7000$ migliaia di km dalla terra. Voglio trasmettere immagini con 2000 linee e 2000 punti per linea. Si quantizza la luminanza pensata come una variabile casuale compresa tra 0 e 1. Bisogna avere un rapporto potenza del segnale, potenza del rumore $= 45\,dB$. Sia $f_0 = 8{,}5\,GHz$, $B_c = 2{,}5\,kHz$. La potenza media $P_T = 1\,kW$ non deve superare. $P(\varepsilon)_{bit} < 10^{-7}$. Inoltre $G_T = 60\,dB$ $D_R = 15\,m$ e $\eta = 0{,}65$ (efficienza), $T_R = 40\,K$, $T_G = 10\,K$. Per i dati $\delta = 0{,}2$. Si indichi il tipo di modulazione da usare.

Innanzitutto: $\left.\frac{S}{N}\right|_{dB} = 6 \cdot m \Rightarrow 48 = 6 \cdot m \Rightarrow m = \frac{48}{6} = 8\,bit$. Inoltre: $A_{R\,eff} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 11{,}5\,m^2$ (area ricevitore).

A questo punto:

$$P_R = P_T \cdot \frac{1}{4\pi d^2} G_T A_{R\,eff} = 7{,}47^{-16}\,W$$

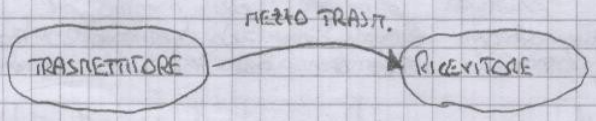
Inoltre:

$$\eta = KT = 1{,}37 \cdot 10^{-23} \cdot 20 = 27{,}4 \cdot 10^{-23}. \Rightarrow B = f_s(1+\delta) = f_s(1+0{,}2) = 200\,ksimb/s.\ (\pi\text{-QAM}).$$

Infatti: $B = 2{,}5\,kHz \Rightarrow \frac{2{,}5}{(1+0{,}2)} = f_{simbolo}$. Quindi: usando un 2QAM $\Rightarrow p(\varepsilon) = \frac{1}{2}\,erfc\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\frac{P_R/f_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{-7}$

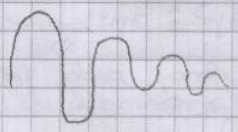
Si noti che usando un 4QAM non si rispettano più i vincoli sulla prob. di errore.

Analizziamo ora il concetto di "codifica di canale". Per codifica di canale si intendono quell'insieme di tecniche che permettono di rendere il sistema di comunicazione adatto per la correzione di errori in fase di ricezione. Consideriamo di nuovo lo schema elementare di un sistema di comunicazione:



Ci sono sostanzialmente due tipi di problematiche legate alla trasmissione di dati:

1) ATTENUAZIONI → è un problema legato al fatto che trasmettendo un segnale su lunghe distanze può accadere che l'ampiezza del segnale si attenui. Graficamente:



Per ovviare a questo problema, posso utilizzare uno strumento denominato AMPLIFICATORE, che ha lo scopo di ripristinare l'ampiezza originale del segnale.

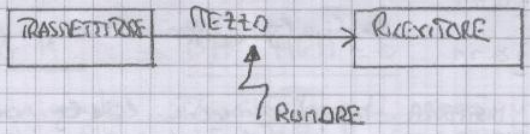
2) DISTORSIONE → è un problema più grave dell'attenuazione perché non esiste uno strumento ad-hoc in grado di risolverlo. Immagino che il trasmettitore trasmetta una sequenza di bit, come per esempio:

0110101

e il ricevitore riceva la sequenza seguente:

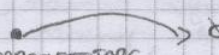
(1)110101 → bit errato

si ottiene che la sequenza ricevuta non coincide con quella trasmessa, in quanto è presente un bit errato (in questo caso è più significativo). Ciò viene causato da un rumore che viene a sommarsi al segnale utile nella fase di trasmissione.



Per risolvere la distorsione si usano le tecniche di "codifica del canale". Una tecnica possibile è quella di richiedere al trasmettitore di ritrasmettere i dati ogni volta che si presenta un errore in

rietione. Questa tecnica prende il nome di AUTOMATIC REPEAT REQUEST. Un altro metodo si basa sui SISTEMI A RIPETIZIONE. In breve trasmetto ogni bit del simbolo n volte con n possibilmente dispari. Per esempio:



Questa è una sequenza di 3 bit. Ogni bit lo trasmetto tre volte. Se trasmetto il primo bit (quello meno significativo) tre volte può accadere che mi escano tre zeri, tre uni, 2 zeri e un uno o viceversa 2 uni e uno zero. Quindi:

*In questo caso controllo il numero di "uni" e di "zeri" e decido di conseguenza. Per esempio mi esce:

1 0 1

Il numero di "uni" è maggiore del numero di "0" quindi scelgo uno.

Quindi scelgo il bit che ha la probabilità più alta di uscire.

$$\begin{cases} P(1) = \dfrac{m(1)}{m_{TOT}} = \dfrac{2}{3} \\ P(0) = \dfrac{m(0)}{m_{TOT}} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$ per 1 0 1.

La stessa cosa viene fatta per gli altri bit.

Questa tecnica non richiede nessuna informazione aggiuntiva da parte del trasmettitore e quindi viene detta FEC (Forward error correction). Si nota inoltre che tale tecnica richiede un n dispari in quanto:

1 0 1 ⇒ lo ripeto n volte con n = 6 ⇒ 0 0 1 1 0 1. Può accadere che P(1) = P(0) (EQUIPROBABILI) e tornerei quindi al punto di partenza

Sia P la probabilità di errore sul singolo bit. Voglio trasmettere ciascun bit tre volte. In questo caso si ha un errore in ricezione quando almeno 2 bit su 3 sono trasmessi in modo errato. Quindi:

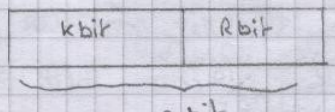
$$P(\varepsilon) = p^3 + (1-p)3p^2 = p^3 + 3p^2 - 3p^3 \cong 3p^2.$$

Perciò in generale si avrà:

$$P(\varepsilon) = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

con: $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ → BINOMIO DI NEWTON.

Consideriamo ora una sorgente che genera in trasmissione n messaggi diversi. Sia $2^k = M$. A questi k bit vengono aggiunti R bit di ridondanza. Quindi:



$R = n - k$. Quindi il codice è composto da k bit contenenti l'informazione, R bit di ridondanza.

CODICE A BLOCCO.

Tali blocchi possono essere visti esplicitamente e in questo caso si parla di CODICI SISTEMATICI, o possono non essere visti esplicitamente e quindi si hanno i CODICI NON SISTEMATICI. Consideriamo ora due parole di codice:

C_i: 1 0 0 1 1

C_j: 1 1 0 1 1

⇒ C_i e C_j differiscono per un bit (-).

Indicando con d_{ij} la DISTANZA tra due codici C_i e C_j ovvero il numero di bit differenti, nel nostro caso si ha:

$$d_{ij} = 1.$$

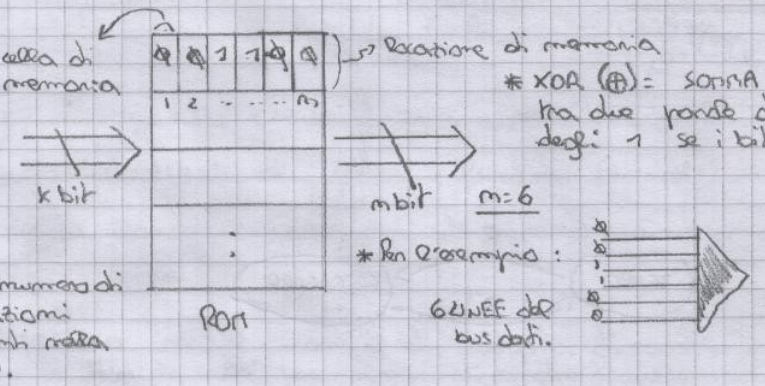
Il minimo valore di d_{ij} ($d_{ij\,min}$) viene chiamata DISTANZA DI HAMMING (d_{min}). La distanza di Hamming stabilisce un limite superiore all'efficacia di un codice.
Immaginiamo di indicare con t gli errori presenti in una parola di codice ricevuta. Quindi:

$$t \leq d_{min} - 1 \longrightarrow \text{per la rilevazione di un errore.}$$

Mentre:

$$2t+1 \leq d_{min} \leq 2t+2 \longrightarrow \text{per la correzione di un errore.}$$

Si preferisce avere una d_{min} dispari. Un modo per schematizzare la codifica a blocchi è quella di pensare ad una ROM con ingresso K bit, e uscita m bit.



* XOR ($\oplus$) = SOMMA LOGICA. Pertanto con lo XOR bit a bit tra due parole di codice mi restituisce una parola con degli 1 se i bit degli addendi sono differenti, altrimenti 0.

* Per esempio:

• 2^K = numero di locazioni presenti nella ROM.

m = numero di celle in una locazione = numero di linee nel bus dati.

Un codice a blocchi ha quindi la seguente struttura: $a_1 a_2 a_3 \dots a_K c_1 c_2 \dots c_R$.
La generazione di un codice a blocchi inizia con la selezione del numero di bit di ridondanza definendo H:

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} h_{11} & h_{12} & h_{1K} & \\ h_{21} & h_{22} & h_{2K} & \\ \dots & \dots & \dots & I \\ h_{R1} & h_{R2} & h_{RK} & \end{array}\right] \qquad H^T = \left[\begin{array}{ccc} h_{11} & \dots & h_{1R} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{K1} & \dots & h_{KR} \\ \hline & I & \end{array}\right]$$

(RXK) (RXR)

A questo punto, sia A un vettore di K bit della parola non ancora codificata. Il codice deve generare un vettore di n cifre binarie che chiameremo B.

$$A = [a_1 \dots a_K]$$

$$B = [b_1 \dots b_n]$$

Quindi:

$$B = A \cdot G$$ dove G è una matrice di 0 e 1 detta MATRICE DI GENERAZIONE DEL CODICE.

Siano: $b_K, b_{K+1} \dots b_n$ i bit di ridondanza.

$$G = \left[\begin{array}{c|ccc} & h_{11} & h_{12} & h_{1R} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ I & \vdots & \vdots & \vdots \\ & h_{K1} & \dots & h_{KR} \end{array}\right] \quad \begin{matrix} \{K \text{ righe} \\ \{m \text{ colonne} \end{matrix}$$

(KxK) (Kxm)

Bisogna che sia:

$$G \cdot H^T = 0 = G^T H. \longrightarrow B H^T = AGH^T = 0$$

Sia ora R un generico messaggio ricevuto. In ricezione ci sarà un dispositivo che esegua il prodotto: $HR^T \neq 0$. Quindi uno o più bit di R sono errati. Se T è la parola trasmessa e $T \neq R \Rightarrow$

$$R = T \oplus E$$ dove E è una parola di errore.

Il primo passo in un processo di decodifica è la valutazione della sindrome S della parola di codice ricevuta. La sindrome S è così definita:

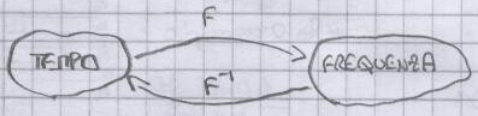
$$S = HR^T$$

Se $R = \bar{T}$ → S sarà chiaramente nulla. Se ci sono errori si ha: $T \neq R \rightarrow S = HR^T = H(T^T \oplus E^T) =$
La sindrome S fornisce un'indicazione dei bit che ci sono o meno
errori. Inoltre se $S \neq 0$, S ci fornisce un'informazione sulla posizione in cui $= H\bar{T}^T \oplus HE^T$.
potrebbero essere i degli errori. Condividiamo ora con un riassunto sulle trasformate di Fourier:

- TRASFORMATA DI FOURIER: $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$
- ANTITRASFORMATA DI FOURIER: $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$

Vediamo alcune trasformate notevoli:

1) $\delta(t) \xrightarrow{F} 1$
2) $1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(f)$
3) $A \xrightarrow{F} A\delta(f)$
4) $I\delta(t) \xrightarrow{F} I$
5) $A\cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{F} \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$
6) $A\sin 2\pi f_0 t \xrightarrow{F} \frac{A}{2} e^{-j\pi/2}(\delta(f-f_0)) + \frac{A}{2} e^{j\pi/2}\delta(f+f_0)$
7) $A\,\mathrm{Rect}(t/T) \xrightarrow{F} AT\,\mathrm{Sen}(\pi fT)/\pi fT$
8) $A\,\mathrm{Tri}(t/T) \xrightarrow{F} AT\left(\frac{\mathrm{Sen}(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2$
9) $\mathrm{sca}(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
10) $e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f}$



Proprietà:

1) Linearità: $s(t) = s_1(t) + s_2(t) \xrightarrow{F} S(f) = S_1(f) + S_2(f)$
2) Scaling: $s(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} S(f/a)$
3) $s(-t) \xrightarrow{F} S(-f)$
4) Traslazione: $s(t-t_0) \xrightarrow{F} S(f)e^{-j2\pi f t}$, $s(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{F} S(f-f_0)$
5) Convoluzione: $s_1(t) * s_2(t) \xrightarrow{F} S_1(f) \cdot S_2(f)$
6) Modulazione: $s_1(t) \cdot s_2(t) \xrightarrow{F} S_1(f) * S_2(f)$
7) Derivazione: $d/dt\, s(t) \xrightarrow{F} j2\pi f S(f)$
8) Integrazione: $\int_{-\infty}^{t} s(t)dt \xrightarrow{F} \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2}\delta(f) S(0)$