

Indichiamo con  $p(t)$  la differenza tra i due segnali vici in ingresso, e i due segnali in uscita. Quindi:

$$\begin{cases} p(t) = s_1(t) - s_2(t) \\ p_o(t) = s_{o1}(t) - s_{o2}(t) \end{cases} \quad \text{Sia } P_o(p) = \frac{H_R(p) \cdot P(p)}{P(p)} \quad \text{e quindi: } \delta^2 = \frac{P_o^2(t)}{\delta_o^2}$$

Perciò:  $p_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_o(p) e^{j2\pi p t} dp = \int_{-\infty}^{\infty} H_R(p) P(p) e^{j2\pi p t} dp$

$$\delta_o^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{m o(t)}(p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(p) \cdot |H_R(p)|^2 dp \quad \text{Si ricordi infatti che } m(t) \text{ ha } S_m(p) \text{ come densità spettrale di potenza.}$$

Quindi:  $\frac{P_o^2(t)}{\delta_o^2} = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(p) P(p) e^{j2\pi p t} dp|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(p)|^2 \cdot S_m(p) dp}$  - sfruttando la disuguaglianza di Schwartz:  $|\int_{-\infty}^{\infty} X(p) Y(p) dp|^2 \leq |\int_{-\infty}^{\infty} X(p) dp|^2 \cdot |\int_{-\infty}^{\infty} Y(p) dp|^2$

Posto:  $\begin{cases} X(p) = \sqrt{S_m(p)} \cdot H_R(p) \\ Y(p) = \frac{1}{\sqrt{S_m(p)}} P(p) e^{j2\pi p t} \end{cases} \Rightarrow \frac{P_o^2(t)}{\delta_o^2} = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} X(p) Y(p) dp|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(p)|^2 S_m(p) dp} \leq \int_{-\infty}^{\infty} Y(p)^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(p)|^2}{S_m(p)} dp$

Quindi  $\delta_{MAX}^2$  si ottiene quando  $H_R(p) = k \frac{P^*(p)}{S_m(p)} e^{-j2\pi p t}$ . NB:  $X(p) = k Y^*(p)$

Perciò la relazione che ci fornisce il filtro ottimale è:  $H_R(p) = k \frac{P^*(p)}{m/2} e^{-j2\pi p t}$

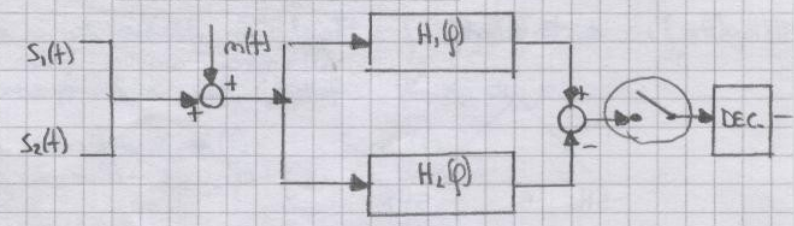
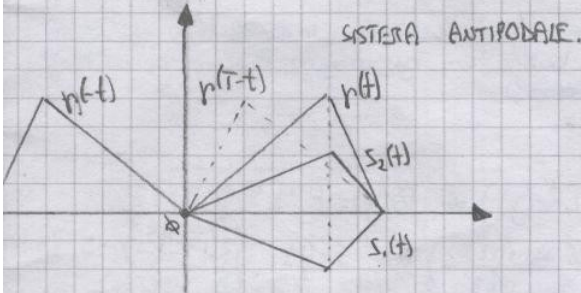
La risposta all'impulso è:  $p(t) = \frac{2k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(p) e^{-j2\pi p t} e^{j2\pi p t} dp = \frac{2k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(p) e^{j2\pi p (T-t)} dp$

Se tutti i segnali e le risposte all'impulso sono reali si ha:  $h(t) = h^*(t)$ .

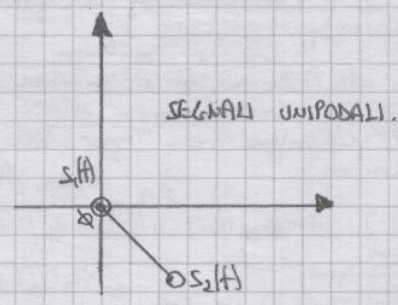
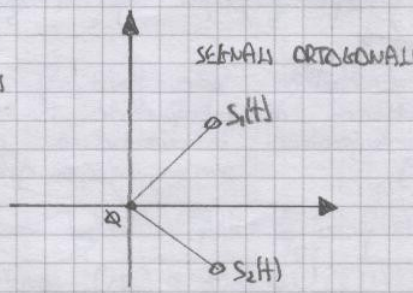
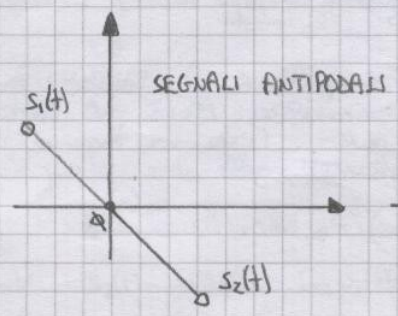
Quindi:  $h(t) = \frac{2k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(p) e^{j2\pi p (T-t)} dp = \frac{2k}{2} P(T-t) = \frac{2k}{m} [S_1(T-t) - S_2(T-t)] \rightarrow$  **FILTRO ADATTATO AI SEGNALI IN INGRESSO.**

Quindi il filtro adattato (alla differenza dei segnali di ingresso) è quel filtro che minimizza la probabilità di errore. Possiamo considerare la risposta all'impulso come composta dai contributi di due filtri adattati ai singoli segnali di ingresso. Quindi:

$$h(t) = \frac{2k}{m} [S_1(T-t) - S_2(T-t)] = h_1(t) - h_2(t) = \frac{2k}{m} S_1(T-t) - \frac{2k}{m} S_2(T-t)$$



Ricordandosi che:



Somma:  $\delta_{MAX}^2 = \left[ \frac{P_o(t)}{\delta_o^2} \right]_{MAX} = \frac{2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|P(p)|^2}_{\text{energia}} dp$  grazie a Parseval si ha:  $\delta_{MAX}^2 = \frac{2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = \frac{2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t) - s_2(t))^2 dt$

$$= \frac{2}{\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt \right]$$

$\uparrow E_1$                        $\uparrow E_2$                        $\uparrow E_1 E_2$

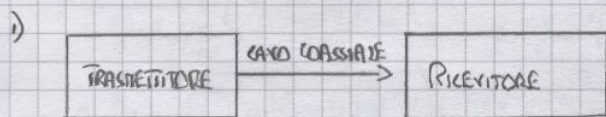
• Infatti Parseval afferma che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(-f)Y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(-f) df$$

Quindi riassumendo:

- SEGNALI ANTIPOFASI  $\Rightarrow s_1(t) = -s_2(t) \Rightarrow \delta_{MAX}^2 = \frac{8E_s}{\eta}$
- SEGNALI ORTOGONALI  $\Rightarrow \int s_1(t)s_2(t) dt = 0 \Rightarrow \delta_{MAX}^2 = \frac{4E_s}{\eta}$ ,  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\delta_{MAX}}{2\sqrt{\epsilon}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2$
- SEGNALI RANDOMICI  $\Rightarrow \int s_1(t)s_2(t) dt = 0 \Rightarrow \delta_{MAX}^2 = \frac{2E_s}{\eta}$ ,  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{2\epsilon}} \right)^2$

Vediamo ora qualche esempio:



$d = 0,3$  è il fattore di attenuazione del cavo.

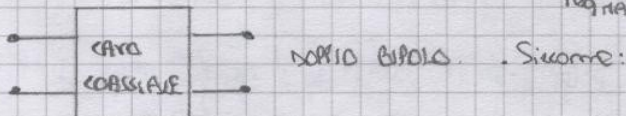
$T_0 = 300^\circ K$  è la temperatura fisica del cavo

$T_R = 600^\circ K$  è la temperatura equivalente del trasmettitore.

$A = 5$  è l'amplificazione dell'amplificatore posto a monte del cavo.

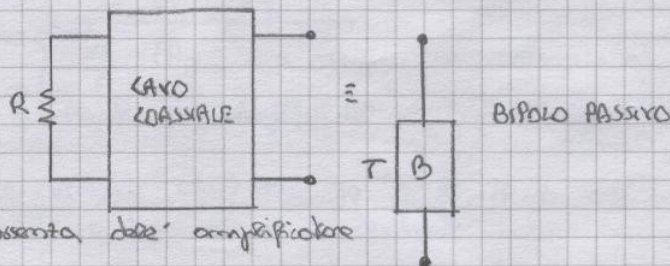
$T_{eq MAX} = ?$  (dell'amplificatore).

Consideriamo:



Assumiamo:

$$T_{eq} = \frac{T_0(1-d)}{d} = \frac{300^\circ K(1-0,3)}{0,3} = 75^\circ K$$



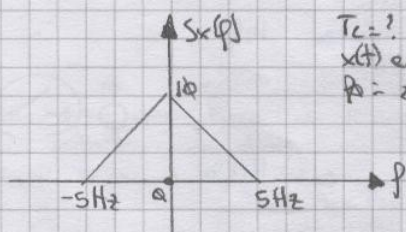
Questa è la temperatura equivalente del cavo. In assenza dell'amplificatore la temperatura totale del sistema è:

$$T_{eq TOT} = T_{eq} + \frac{T_R}{d} = 325^\circ K$$

Nel caso invece in cui è presente anche l'amplificatore si ha:

$$T_{eq TOT} = T_0 + \frac{T_{eq}}{A} + \frac{T_R}{A d} \Rightarrow T_0 = 600^\circ K$$

2) Sia  $x(t)$  un processo stazionario con valore medio nullo, varianza  $10$  e densità spettrale di potenza data da:



$T_c = ?$  in modo che i campioni  $X(nT_c)$  siano indipendenti.  $x(t)$  entra in un filtro passa basso con guadagno  $A$  e freq. di taglio  $f_c = 2,5$  Hz. Valore quadrato medio?

\* Simili a:

$$S_x(f) = F[R_x(\tau)] \Rightarrow R_x(\tau) = F^{-1}[S_x(f)]$$

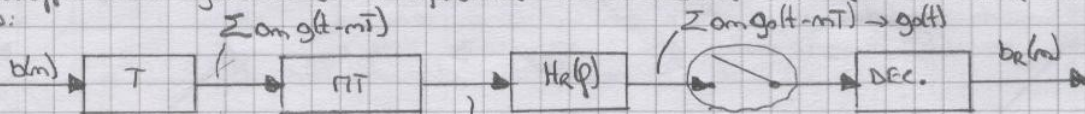
$$\text{Quindi: } R_x(\tau) = 10 \left( \frac{\sin(\pi \tau / 5)}{\pi \tau / 5} \right)^2 \Leftrightarrow S_x(f) = \begin{cases} 2(1 - \frac{|f|}{5}) & -5 \leq f \leq 5 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Perciò:

$$R_x(\tau) = 0 \text{ per } T_c = K \frac{1}{5}$$

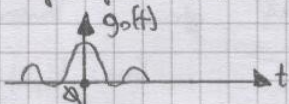
$$P_u = \frac{1}{T_c} \int_{T_c} |x(t)|^2 dt = \int_{-5}^5 G_u(f) df = \int_{-5}^5 2 \left( 1 - \frac{|f|}{5} \right) df = 2 \int_{-5}^5 \left( 1 - \frac{|f|}{5} \right) df = 7,5$$

Abbiamo visto che se ho in ingresso al ricevitore una serie di impulsi di lunghezza minore del tempo di simbolo non sono problemi di interferenza intersimbolica. L'uso del filtro adattato puntiforme non garantisce interferenza intersimbolica nulla. Esiste una tecnica migliore. Consideriamo:



Sia  $H_c(f)$  la p.d.f. del MT e sia costante nella banda di interesse. Supponiamo per ipotesi che MT non esista. Sia  $g(t)$  una forma d'onda di Nyquist, cioè a simmetria pari:

$$G_c(f) = G_o(f)^*$$



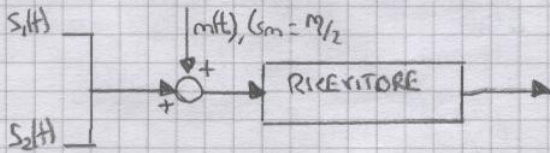
\* Se c'è anche un filtro adattato si ha:  $H_c(f) \cong G_c(f)$

Quindi se il nostro filtro deve essere adattato, la sua risposta in frequenza sarà direttamente proporzionale a  $G_N(f)$ . Posto:

$$G(f) = \sqrt{G_N(f)} \rightarrow \text{trasformata di Fourier di un impulso di Nyquist.}$$

$$H(f) = \sqrt{G_N(f)}$$

$G_N(f)$  è un impulso di Nyquist e se utilizzo un filtro adattato questo mi garantisce interferenza intersimbolica nulla. Il prezzo da pagare sta nella complessità del trasmettitore. Consideriamo il seguente sistema di ricezione:

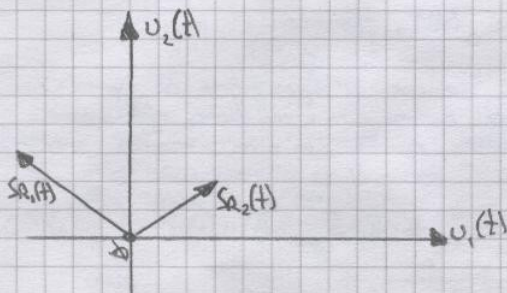


\* Supponiamo di trasmettere un bit alla volta. Siamo:  $S_{R1}(t), S_{R2}(t)$ ; segnali ricevuti.

Quindi:

$$r(t) = \begin{cases} S_{R1}(t) + m(t) \\ S_{R2}(t) + m(t) \end{cases}$$

Possiamo rappresentare i segnali  $S_{R1}(t)$  e  $S_{R2}(t)$  su un piano bidimensionale.



\*  $\begin{cases} S_{R1}(t) = \text{segnale ricevuto e "1"} \\ S_{R2}(t) = \text{segnale ricevuto e "0"} \end{cases}$

Vediamo di comprendere meglio la rappresentazione geometrica dei segnali. Un segnale  $r(t)$  può essere interessante scomporlo in questa maniera:

$$r(t) = c_1 g_1(t) + \dots + c_n g_n(t)$$

dove  $g_1, \dots, g_n$  sono le forme d'onda di base e  $c_1, \dots, c_n$  sono delle costanti. Ogni forma d'onda porta con sé un'informazione, le informazioni portate dalle varie  $g(t)$  sono differenti tra loro quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(t) \cdot g_2(t) dt = 0 \rightarrow \text{CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ}$$

Inoltre vale anche la condizione di NORMALITÀ. cioè:  $\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_i(t) dt = 1$ . Quindi:  $\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j(t) dt =$

Si scrive:

$$\int_T r(t) dt = \int_T (c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ

$$\int_T r(t) g_i(t) dt = \int_T (c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots) g_i(t) dt$$

Sfruttando quindi la condizione di ortogonalità si ha:  $\int_T r(t) g_i(t) dt = \int_T c_i g_i^2(t) dt \Rightarrow c_i = \int_T r(t) g_i(t) dt$

Infatti:

$$c_i = \frac{\int_T r(t) \cdot g_i(t) dt}{\int_T g_i(t) \cdot g_i(t) dt}$$

\* L'ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT funziona così:

$$\begin{cases} s_1(t) = S_{11} u_1(t) + S_{12} u_2(t) + \dots + S_{1n} u_n(t) \\ s_2(t) = S_{21} u_1(t) + S_{22} u_2(t) + \dots + S_{2n} u_n(t) \\ \vdots \\ s_n(t) = S_{n1} u_1(t) + S_{n2} u_2(t) + \dots + S_{nn} u_n(t) \end{cases}$$

Il primo passo è:  $s_1(t) = S_{11} u_1(t) \rightarrow$  poniamo a zero tutti gli altri coefficienti. Quindi:

$$\int_T s_1(t) \cdot s_1(t) dt = \int_T S_{11}^2 u_1^2(t) dt \quad (\text{altri al quadrato e integrato sul periodo})$$

$$\int_T s_1^2(t) dt = \int_T S_{11}^2 u_1^2(t) dt \Rightarrow \int_T s_1^2(t) dt = S_{11}^2 \int_T u_1^2(t) dt \Rightarrow S_{11} = \frac{\int_T s_1^2(t) dt}{\int_T u_1^2(t) dt} \Rightarrow s_1(t) / \sqrt{\int_T s_1^2(t) dt} = u_1(t)$$

A questo punto si considera la seconda equazione:

$$s_2(t) = S_{21} u_1(t) + S_{22} u_2(t) \Rightarrow \int_T s_2(t) u_1(t) dt = \int_T S_{21} u_1^2(t) dt + \int_T S_{22} u_1(t) u_2(t) dt \Rightarrow S_{21} = \frac{\int_T s_2(t) u_1(t) dt}{\int_T u_1^2(t) dt}$$

Quindi:

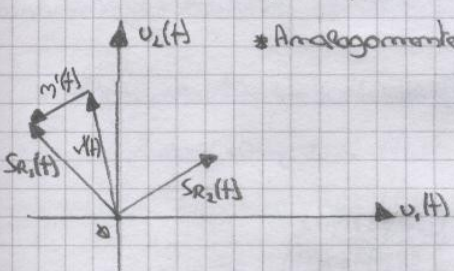
$$s_2(t) - S_{21} u_1(t) = S_{22} u_2(t) \Rightarrow \int_T S_{22}^2 u_2^2(t) dt = \int_T (s_2(t) - S_{21} u_1(t))^2 dt \Rightarrow S_{22}^2 = \frac{\int_T (s_2(t) - S_{21} u_1(t))^2 dt}{\int_T u_2^2(t) dt}$$

Infine:

$$u_2(t) = \frac{s_2(t) - S_{21} u_1(t)}{S_{22}} = \frac{s_2(t) - S_{21} u_1(t)}{\sqrt{\int_T (s_2(t) - S_{21} u_1(t))^2 dt}}$$

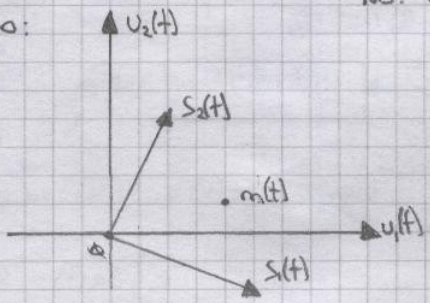
Il processo si ripete ricorsivamente. Tornando a noi, i segnali  $s_{r1}(t)$  e  $s_{r2}(t)$  possono essere rappresentati in uno spazio a due dimensioni. Le forme d'onda  $u_i(t)$  sono ortogonali tra loro. Funzione d'onda è univale e una componente non deterministica e quindi sono necessarie infinite forme d'onda per la sua rappresentazione. Possiamo però scomporre l'onda in una componente rilevante e in una irrilevante. Quindi:

$u_1(t) + u_2(t) \rightarrow$  COMPONENTE RILEVANTE  
 $m(t) = m'(t) + m''(t) \rightarrow$  COMPONENTE IRRILEVANTE.



\* Analogamente:  $r(t) = r'(t) + r''(t)$

\* Consideriamo:



NB:  $r'(t) =$  componente rilevante.

Le componenti di  $m(t)$  lungo  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  sono:

$$\beta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) u_1(t) dt$$

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) u_2(t) dt$$

con  $\beta_i$  variabile aleatoria. Siccome l'operazione di proiezione è lineare  $\Rightarrow$  se  $m(t)$  è gaussiana quindi  $m'$  e  $m''$  sono gaussiane. Inoltre se  $m$  ha media nulla, anche  $m'$  e  $m''$  hanno media nulla.

Quindi:

$$E[\beta_1 \beta_2] = E\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) u_1(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} m(\tilde{t}) u_2(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cdot \text{posto } \tilde{t} = \lambda \Rightarrow E\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) u_1(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} m(\lambda) u_2(\lambda) d\lambda \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[m(t) m(\lambda)] u_1(t) u_2(\lambda) dt d\lambda$$

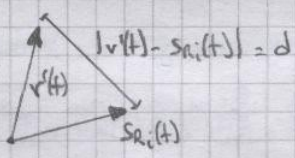
Visto che il numero è bianco si ha:

$$E[\beta_1 \beta_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2} \delta(t-\lambda) u_1(t) u_2(\lambda) dt d\lambda = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) u_2(t) dt = 0$$

Quindi la covarianza di  $\beta_1$  e  $\beta_2$  è  $S^2 = \frac{\eta}{2}$ .

Supponendo che i simboli trasmessi siano equiprobabili, il ricevitore dovrà stimare i bit trasmessi. In breve bisogna trovare il simbolo cui corrisponde la probabilità condizionata massima. Così si vede il simbolo con:

$$|v'(t) - s_{r1}(t)| \text{ MINIMO.}$$



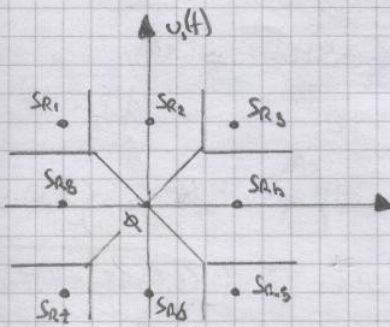
Quindi sia  $d$  la distanza tra le due forme d'onda. In particolare la prob. di errore del ricevitore è data da:

$$P(E) = P(|\beta_{s_{r1}(t)} - \beta_{s_{r2}(t)}| > \frac{d}{2}) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{d/2}{\sqrt{2S^2}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{d^2}{\eta}\right)^{1/2}$$

Vediamo ora un sistema di trasmissione con un alfabeto di dimensione  $M \geq 2$ . Inanzitutto un simbolo può essere composto da un bit, nel qual caso si ha:

$$P_b = P_s$$

oppure può essere composto da più bit. Sia  $N$  la dimensione del simbolo. Quindi:  $M = 2^N$ . Ad ogni simbolo è associata una forma d'onda. Qui avrà bisogno di uno spazio a  $M$  dimensioni per rappresentare le  $M$  forme d'onda. Supponiamo di avere 8 simboli da trasmettere. Ci bastano 2 forme d'onda per la relativa rappresentazione.



\* In pratica dividiamo lo spazio bidimensionale in otto regioni. In ogni regione ci sono i punti più vicini al relativo simbolo ricevuto.

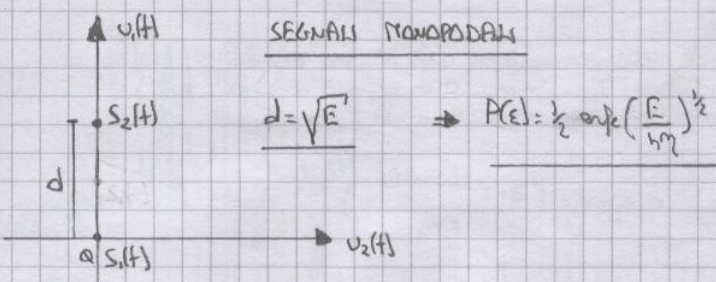
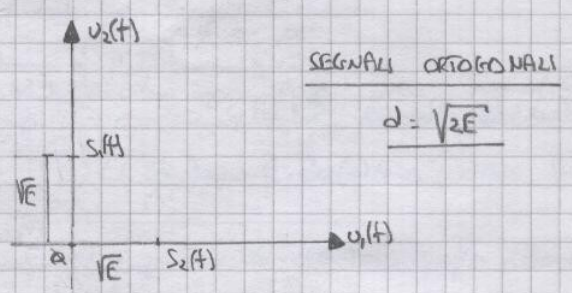
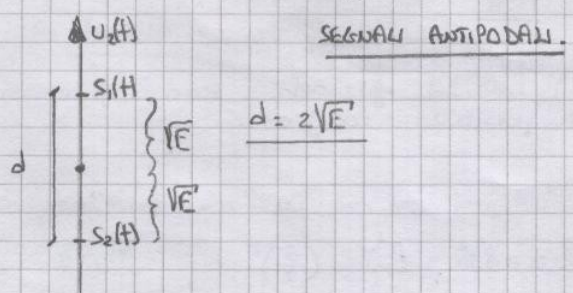
In base a dove cade  $v'(t)$  il trasmettitore deciderà che simbolo è stato trasmesso. Questo chiaramente dipende dalla regione interessata o sia caduta di  $v'(t)$ .

\* La prob. di scambiare un simbolo con un altro è:

$$P_s(E) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1 - P(s_i \text{ corretto}))$$

↑ Prob. di errore sul simbolo.

Abbiamo visto nel caso binario che la prob. di errore del ricevitore è:  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right)^{\frac{1}{2}}$ .  
 Consideriamo il caso di segnali antipodali:

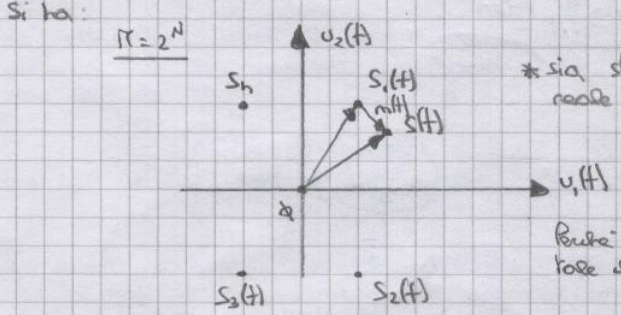


Impatti:  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Delta_{\max}}{2\sqrt{E}}\right)^{\frac{1}{2}}$  con  
 $\Delta_{\max} = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt =$   
 $= \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t) - s_2(t))^2 dt =$

$$= \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (s_1^2(t) + s_2^2(t) - 2s_1(t)s_2(t)) dt = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt + \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt - 2 \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt$$

Quindi:  $\begin{cases} s_1(t) = \dots \\ s_2(t) \text{ qualsiasi} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{\max} = E_2 =$   
 $= \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt \Rightarrow P(\epsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt}{2\sqrt{E}}\right)^{\frac{1}{2}} =$   
 $= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\eta}{2} E_s}{2\sqrt{E}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_s}{h\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$

Terminiamo il sistema di trasmissione con più simboli.



\* sia  $s_1(t)$  il segnale reale da ricevere e sia  $s_2(t)$  il segnale prova di rumore.  
 $s(t) = s_1(t) + m(t)$

Pote il simbolo ricevuto sia errato, il rumore deve essere tale che  $s(t)$  entri in un altro quadrante.

Quindi la probabilità di errore su simbolo è:  $P_s(\epsilon) = P(s_1) \cdot P(\text{non corretta decisione}) + P(s_2) \cdot P(\text{non corretta decisione}) + \dots$

Però:  $P_s(\epsilon) = P(s_2|s_1) + P(s_3|s_1) + P(s_4|s_1)$

Quindi possiamo anche scrivere:  $P_s(\epsilon) = 1 - P(\text{corretta ricezione}) = 1 - p(\beta_1 < \frac{d}{2}, \beta_2 < \frac{d}{2}) =$

$$= 1 - [1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right)]^2 [1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right)]^2 =$$

$$= 1 - [1 - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right) + (\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right))^2]^2 = 4 \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right)^2$$

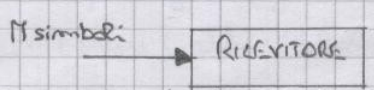
Vediamo dei casi particolari:

UNION BOUND APPROXIMATION.

• SISTEMI MULTILEVEL: Consideriamo il caso binario con forme d'onda antipodali.  
 Quindi:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{h\eta}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se imponiamo che in ingresso ci sia un impulso di Nyquist e ponendo  $B = \frac{1}{2} f_b(1+\delta)$  l'unico parametro libero è  $E_b$ . Per risparmiare banda e meglio considerare un gruppo di bit anziché un singolo bit.

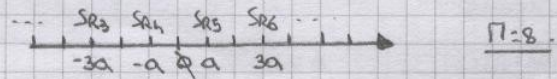


\* Gli  $M$  simboli di ingresso vengono rappresentati da una forma d'onda, che può assumere  $M$  ampiezze.

Ogni simbolo è composto da  $N$  bit. Quindi:  $M = 2^N$ . Sia  $T_s$  il tempo di simbolo, e:

$$\underline{T_s = N T_b} \Rightarrow f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{N T_b} = \frac{f_b}{N} \text{ visto che } f_b = \frac{1}{T_b}$$

Per rappresentare questi 11 simboli usiamo:



I simboli binomiali sono quelli agli estremi ( $s_{k1}, s_{k6}$ ), mentre gli altri sono spalmati. Infatti questi ultimi hanno due vicini verso i quali è possibile sbagliare.

$$P_s(\epsilon) = 2 \cdot \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'energia media per simbolo è:  $E_{ms} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{2}(2i-1)\right)^2 = \frac{N^2-1}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^2$

DENSITÀ DI PROB. DEL RUMORE GAUSSIANO DI INGRESSO

Insomma:  $E_s = NE_b \Rightarrow E_b = E_s/N \approx \frac{2^{2N}-1}{3} \frac{d^2}{4}$ . Quindi con aumentare di N la banda si riduce di un fattore  $1/N$ , ma l'energia media sui singoli bit aumenta esponenzialmente.

Se  $N$  è grande,  $e^{-x}$  è trascurabile e quindi:

$$E_{ms} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow P_s(\epsilon) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_{ms}}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3 \cdot 2^{-2(N-1)} E_s}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dove:  $E_s$  = energia associata a ciascun simbolo.

Insomma:  $P_s(\epsilon) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3 \cdot 2^{-2N} E_s}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$  e  $E_s = NE_b \Rightarrow P_s(\epsilon) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3 \cdot 2^{-2N} NE_b}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$

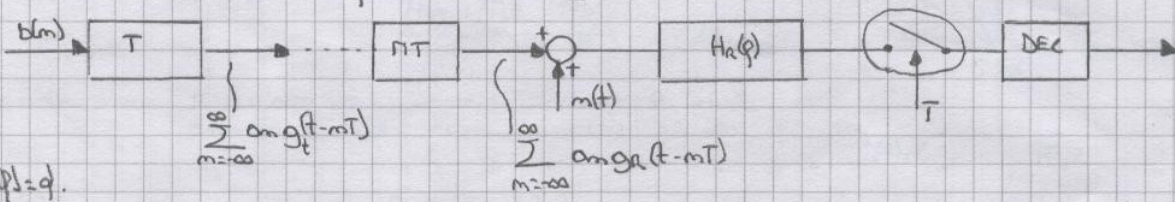
Possiamo poi pensare di associare ai simboli ambigui codici binari che si differenziano di un solo bit. Per esempio:

- $s_1 \rightarrow 0000$
- $s_2 \rightarrow 0001$
- $s_3 \rightarrow 0011$
- $s_4 \rightarrow 0100$
- $s_5 \rightarrow 1100$
- $s_6 \rightarrow 1111$
- $s_7 \rightarrow 1001$
- $s_8 \rightarrow 1010$

CODIFICA - GRAY

\* Quindi:  $P_b(\epsilon) = \frac{1}{N} P_s(\epsilon)$

Riconsideriamo la nostra sequenza binaria..



NB:  $H_c(f) = g$ .

NB:  $g_c(t-mT)$  = forma d'onda che rappresenta ogni impulso in trasmissione.

La banda da mettere a disposizione è  $B = \frac{1}{2} P_b(1+\delta)$  per un RT passa-basso.

Insomma:  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$  con  $S_m(f) = \eta/2$ .

Vediamo quale è il legame tra energia e potenza? Rimoviamo stazionaria il nostro processo:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t-mT-g)$$

La densità spettrale di potenza è:

$$\begin{cases} S_{g_t}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2 \\ S_{g_r}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_R(f)|^2 \end{cases}$$

con:  $|G_T(f)|^2$  = densità spettrale di energia del nostro impulso.

Insomma:  $\int_{-\infty}^{\infty} S_{g_t}(f) df = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = P_m$  per il th. di Parseval.

Si ricordi inoltre:  $P_m = \frac{E}{T}$  \* se  $a_m \neq \pm 1 \Rightarrow \sigma_a^2 \neq 1 \Rightarrow$  l'energia degli impulsi contiene  $\sigma_a^2$ .

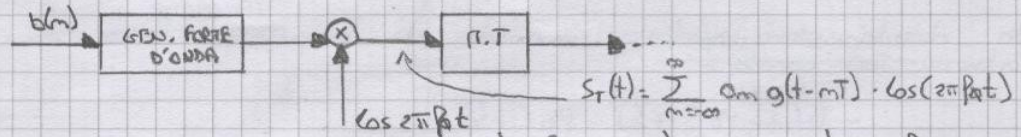
Chiaramente queste relazioni valgono se  $a_m = \pm 1$  e hanno media nulla.

Quindi:  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{P_b \cdot T}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$   $\rightarrow$  ci fornisce la prob. di errore in base alla potenza media che otteniamo ricevuto.

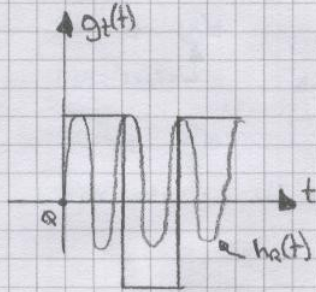
Il mezzo trasmissivo (R.T) è caratterizzato da una banda. Al di fuori di questa banda

possono occupare case "strane". Si possono usare forme d'onda intrinsecamente limitate (IMPULSI DI NYQUIST) per evitare ciò. Vediamo ora i sistemi di trasmissione di tipo PASSA-BANDA:

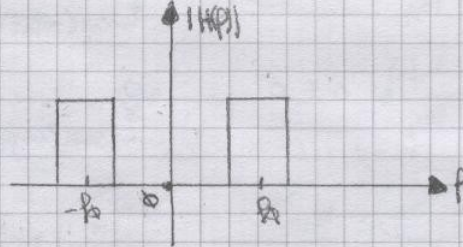
CASO BINARIO



Supponiamo che  $g_t$  sia un impulso rettangolare.

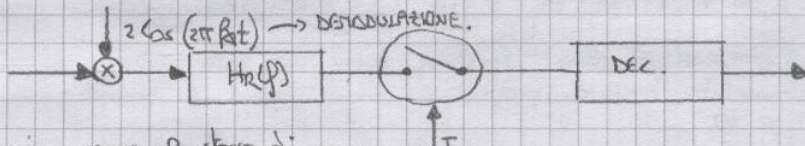


\* Si ricordi che un  $\pi$  passa-banda ha questa funzione di tr.



$h_r(t)$  sarà un tratto di sinusoidale nel caso in modulazione.

Si noti che se non ci fosse la modulazione riceveremmo solo rettangoli. Tenendo conto che  $f_0 \gg f_s$ , questa cosa è poco realizzabile in pratica. Bisogna introdurre un demodulatore prima del filtro adattato. Quindi:



Le prestazioni sono le stesse di un sistema di trasmissione in banda base. Quindi:  $P(\epsilon) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \frac{E_b}{N_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Il segnale  $S_T(t)$  trasmesso sarà dato da:

$$\begin{cases} S_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f t) \\ S_0(t) = -A \cdot \cos(2\pi f t) = A \cos(2\pi f t + \pi) \end{cases}$$

\* Il modulatore non muta l'ampiezza del segnale, ma solo la fase iniziale. Sistemi di questo tipo vengono detti QPKS.

In questo caso la potenza media del segnale trasmesso sarà:  $P_r = \frac{A^2}{2}$ . Calcoliamoci la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso; immantovata andiamo il processo stocastico:

$$s_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t-mT - \vartheta) \cdot \cos(2\pi f t)$$

Quando il coseno è  $\pm 1$  il processo non è stocastico. Aggiungo la fase iniziale anche alla nostra portante sinusoidale e dunque:

$$\cos(2\pi f t + \varphi). \text{ Quindi: } R(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f t + \varphi) \text{ ha } -\pi \text{ a } \pi.$$

Primo:

$$\begin{aligned} R_R(t, t-\gamma) &= E[R(t)R(t-\gamma)] = E[(s(t) \cdot \cos(2\pi f t + \varphi)) \cdot (s(t-\gamma) \cdot \cos(2\pi f(t-\gamma) + \varphi))] = \\ &= E[s(t) \cdot s(t-\gamma)] \cdot E[\cos(2\pi f t + \varphi) \cdot \cos(2\pi f(t-\gamma) + \varphi)] = \\ &= R_s(\gamma) \cdot E[\cos(2\pi f t + \varphi) \cdot \cos(2\pi f(t-\gamma) + \varphi)] = R_s(\gamma) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f t + \varphi) \cdot \cos(2\pi f(t-\gamma) + \varphi) d\varphi = R_s(\gamma) \dots = R_s(\gamma) \cdot \frac{1}{2} \cos(2\pi f \gamma) \rightarrow \text{pot. stz.} \end{aligned}$$

Quindi:

$$R_R(t, t-\gamma) = R_s(\gamma) \cdot \frac{1}{2} \cos(2\pi f \gamma)$$

Si come:

$$\begin{aligned} S_R(f) &= F[R_R(t, t-\gamma)] = F[R_s(\gamma)] * F\left[\frac{1}{2} \cos(2\pi f \gamma)\right] = S_s(f) * \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} \delta(f+f_0) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [S_s(f-f_0) + S_s(f+f_0)] \end{aligned}$$

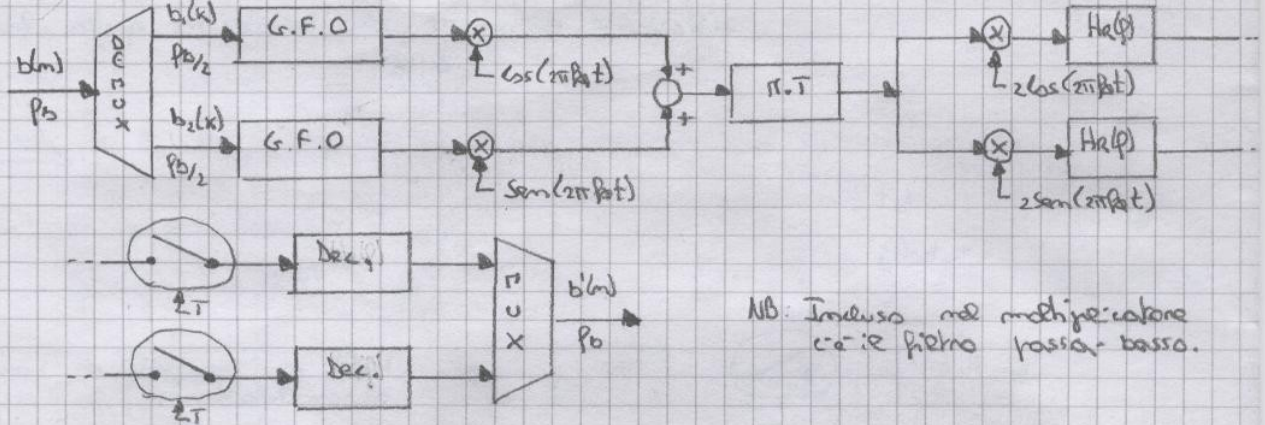
Quindi:

$$\frac{\sigma^2}{T} |G_T(f)|^2 * \frac{1}{T} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)) = \frac{1}{T} [ |G_T(f-f_0)|^2 + |G_T(f+f_0)|^2 ]$$

Questa densità viene filtrata in modo da annullare tutto ciò che è fuori della banda di interesse. Tale banda è:

$$B = 2 \frac{1}{2} P_b (1+\delta) = P_b (1+\delta)$$

Alternativamente posso usare anche due portanti in quadratura:



Possiamo rendere sincroni i nostri canali mettendo un ritardo pari a un tempo di bit. Quindi:

$$s_T(t) = b_1(t) \cos(2\pi f_c t) \sqrt{P_b} + b_2(t) \sin(2\pi f_c t) \sqrt{P_b} = \sqrt{2P_b} \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

Fattore moltiplicativo che tiene conto del fatto che è compietta della cosinusoidale non è proprio 1.

$b_1$  e  $b_2$  possono assumere due valori:

TABELLA

$b_1$	$b_2$	$m$
1	1	0
1	-1	1
-1	-1	2
-1	1	3

$\Rightarrow \phi(t) = -(2m+1)\frac{\pi}{4}$  e  $\phi(t)$  cambia in base ai valori di  $b_1$  e  $b_2$ .

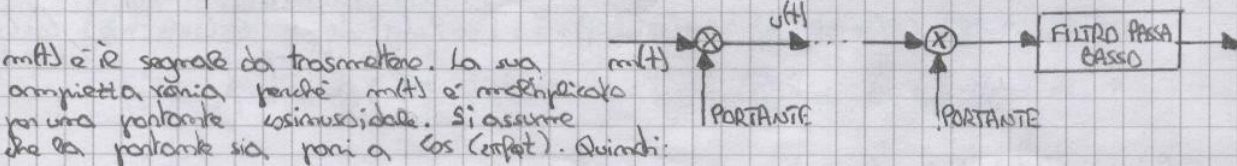
A questo punto ricapitoliamo quanto detto. È possibile che il mezzo trasmissivo abbia un funzionamento di tipo passa-banda. Graficamente:

Il segnale è composto da due toni. Ogni tonello alterna di una costante, a frequenza  $\omega_c$  per un tempo di bit.

• **MODULAZIONE BPSK**: (Binary Phase-shift Keying) si considera un sistema di trasmissione binario.

L'alternanza di ampiezza e fase.  $b(t) \rightarrow +1 \rightarrow "1"$   $b(t) \rightarrow -1 \rightarrow "0"$  filtro di ampiezza pari a  $f_c$ .

Si ipotizza di utilizzare una modulazione in ampiezza. In genere, consideriamo:



$u(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$

\* Il ricevitore è un **DEMODULATORE COERENTE**, in quanto la portante usata in fase di ricezione è la stessa di quella usata in fase di trasmissione.

Chiamando in ricezione il segnale  $u(t)$  viene moltiplicato nuovamente per una nuova portante ( $2\cos(2\pi f_c t)$ ) ottenendo:

$$2u(t) \cos^2(2\pi f_c t) = m(t)(1 + \cos(2\pi f_c t))$$