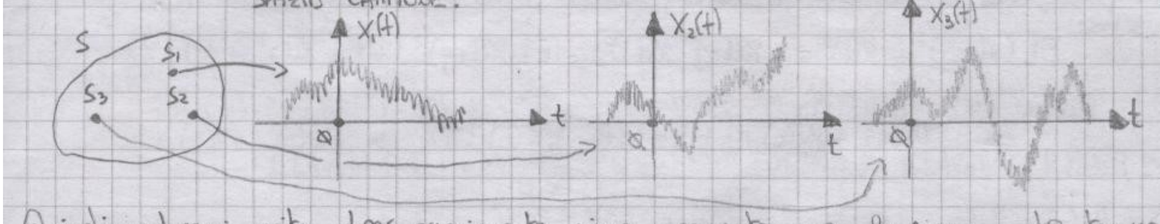
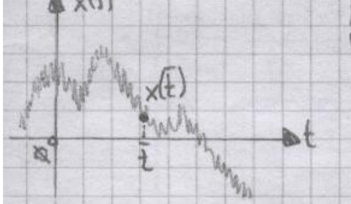
* Processo aleatorio: rappresentazione in termini statistici di segnali che variano nel tempo. Sia S lo SPAZIO CAMPIONE.



* il grafico a lato prende il nome di REALIZZAZIONE del processo.

Quindi ad ogni esito dell'esperimento viene associata una funzione del tempo. Quindi si individua una particolare realizzazione, mentre t scandisce ciascuna realizzazione. Se fissiamo un istante t di osservazione, per esempio: $t = \bar{t}$, si ha che il processo aleatorio si riduce ad una variabile aleatoria. Quindi campionando un processo aleatorio ottengo tante variabili aleatorie.



Nella descrizione di un processo aleatorio considereremo i seguenti parametri statistici:

- $F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_N) \le x_N]$

Fx: FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DI ORDINE N, associata a X(t). Quindi:

- $F_X(x_1; t_1) = P[X(t_1) \le x_1]$ → DISTRIBUZIONE DI ORDINE 1.
- $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2]$ → DISTRIBUZIONE DI ORDINE 2.

NB: Due processi $X(t), Y(t)$ sono indipendenti quando:

$$F_{XY}(x_1, y_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1) \cdot F_Y(y_2; t_2)$$

NB: ';' è 'relativo a'.

Noi, nella descrizione di un processo aleatorio, considereremo tre momenti statistici che sono:

- MEDIA: sia x(t) un processo aleatorio, la sua media si indicherà con $m_X(t)$. Per definizione:

$m_X(t) = E[x(t)]$ ⇒ $E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X\, dx$ → se x(t) è un processo continuo

$E[x(t)] = \sum_{x \in A} x\, p_X(x)$ → se x(t) è un processo discreto

NB: Tutti questi parametri sono deterministici.

- VARIANZA: $Var[x(t)] = \delta_X^2(t) = E[(x(t) - m_X(t))^2]$
- POTENZA STATISTICA: $P_X = \Pi_X(t) = E[|x(t)|^2]$

NB: Se il processo non è complesso ⇒ $P_X = E[x(t)^2]$.

I momenti statistici appena descritti sono di ordine 1. I momenti statistici di ordine 2 sono:

- CORRELAZIONE: $R_X(t,s) = E[X(t) X^*(s)]$
- COVARIANZA: $K_X(t,s) = E[(X(t) - m_X(t))(X(s) - m_X(s))^*]$

* Si noti in particolare che:

$$R_X(t,s) = E[X(t)X(s)^*] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2; t, s)\, dx_1\, dx_2$$

In particolare:

$R_X(t,t) = \Pi_X(t) = P_X(t)$ Infatti:

$$R_X(t,t) = E[X(t)X(t)^*] = E[|x(t)|^2] = \Pi_X(t) = P_X(t)$$

Chiamiamo CORRELAZIONE INCROCIATA tra due processi X(t) e Y(t) la seguente relazione:

$$R_{XY}(t,s) = E[X(t)Y(s)^*]$$

. Se i due processi aleatori hanno correlazione nulla (non sono incorrelati) si ha:

$$R_{XY}(t,s) = E[X(t)] \cdot E[Y(s)^*]$$

Un processo viene detto STAZIONARIO quando la sua descrizione statistica non varia nel tempo. Formalmente consideriamo la traslazione nel tempo: $X_{t_0}(t) = X(t - t_0)$ e quindi:

$$F_{X_0}(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = P[X(t_1 - t_0) \le x_1, X(t_2 - t_0) \le x_2, \dots, X(t_N - t_0) \le x_N] = F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1 - t_0, \dots, t_N - t_0)$$

Un processo di questo tipo è stazionario. Un processo si dice stazionario in media quando:

$m_X(t) = m_X(t - t_0) = cost.$. Un processo è stazionario in correlazione quando: $R_X(t+\tau) = R_{X_0}(t+\tau) = R_X(\tau)$ cioè quando R_X dipende dalla differenza degli indici temporali $t_2 - t_1 = \tau$.

Un processo viene detto stazionario in senso lato se risulta stazionario in media e correlazione. Viceversa un processo stazionario in senso stretto è un processo con stazionarietà su tutte le possibili descrizioni statistiche. Chiaramente un processo stazionario in senso stretto lo è anche in senso lato ma non vale il viceversa. In particolare:

- $R_X(0) = P_X = \Pi_X \ge 0$. Infatti, $R_X(\tau)$ con $\tau = 0$ ⇒ $R_X(t,t) = E[X(t)X(t)^*] = E[|X(t)|^2] = P_X = \Pi_X$.

• $|R_x(\tau)| \le R_x(0), \forall \tau$ ⇒ Infatti: $R_x(0) = P_x \ge 0$. Sia: $E[(X(t+\tau) \pm X(t))^2] \ge 0$ una quantità non negativa. Si ha:

$$E[(X(t+\tau)^2 + X(t)^2 \pm 2X(t+\tau)X(t))] = E[X(t+\tau)^2] + E[X(t)^2] + E[2X(t+\tau)X(t)] \ge 0$$

Quindi:

• $E[X(t+\tau)^2] = R_x(0)$

• $E[X(t)^2] = R_x(0)$

$$\Rightarrow R_x(0) + R_x(0) + E[2\underbrace{X(t+\tau)X(t)}_{R_x(\tau)}] \ge 0 \Rightarrow 2R_x(0) + 2R_x(\tau) \ge 0$$

Concludendo: $-R_x(0) \le R_x(\tau) \le R_x(0)$. Questo accade se $x(t)$ è un processo reale. Se il processo è complesso si ottiene: $Re[R_x(\tau)] \le R_x(0), \forall \tau$.

• $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ se il processo è reale

• $R_x(\tau) = R_x(-\tau)^*$ se il processo è complesso.

Inoltre la DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA viene definita come: $S_x(f) = F[R_x(\tau)]$ → tr. di Fourier di $R_x(\tau)$.

Si noti che:

• $S_x(f) \ge 0$. *Si ricordi che: $P_s = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$ → potenza del segnale periodico $s(t)$.

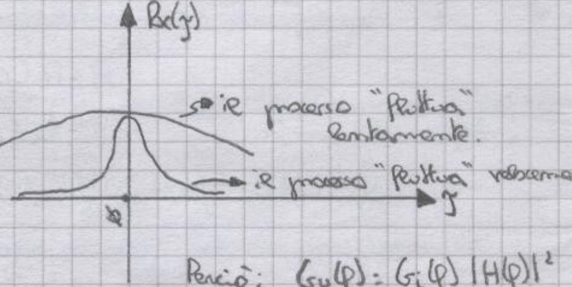
Per il teorema di Parseval si ottiene:

$$P_s = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2$$

→ coeff. della serie di Fourier in forma esponenziale.

e:

$$G_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} G_s(f)\,df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2$$



Siccome però: $R_x(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)^*]$ ⇒ $|X(f)|^2 = X(f)\cdot X(f)^* \xleftrightarrow{F} x(t) * x(t)^*$

Quindi:

$$x(t) * x^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) X^*(-t+\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt = R_x(\tau)$$

Perciò concludendo:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{F} |X(f)|^2 \Rightarrow G(f) = F[R_x(\tau)].$$

Perciò: $G_u(f) = G_i(f)\,|H(f)|^2$

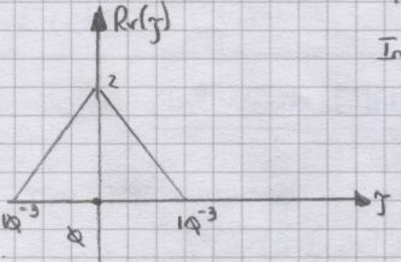
•Es: Sia $v(t)$ un processo stazionario con: $S_v(f) = 2\cdot 10^{-3}\cdot\left[\frac{\text{sen}(10^{-3}\pi f)}{10^{-3}\pi f}\right]^2 \,(V^2/Hz)$. Determinare la funzione di autocorrelazione del processo, e calcolare:

$$E[(v(t) - v(t - 5\cdot 10^{-4}))^2]$$

Innanzitutto:

$$S_x(f) = F[R_x(\tau)] \Rightarrow S_v(f) = F[R_v(\tau)] \Rightarrow \text{antitrasformando: } R_v(\tau) = F^{-1}[S_v(f)]$$

L'antitrasformata di $\left(\frac{\text{sen}\,\pi f T}{\pi f T}\right)^2 A\cdot T$ è un triangolo. Quindi posto: $A = 2$, $T = 10^{-3}$ si ha:



Inoltre: $E[(v(t) - v(t-5\cdot10^{-4}))^2] = E[(v(t)^2 + v(t-5\cdot10^{-4})^2 - 2v(t)v(t-5\cdot10^{-4}))] =$

$= E[v(t)^2] + E[v(t-5\cdot10^{-4})^2] - 2E[v(t)v(t-5\cdot10^{-4})] =$

$= R_v(0) + R_v(0) - 2E[v(t)v(t-5\cdot10^{-4})] = 2R_v(0) - 2E[v(t)v(t-5\cdot10^{-4})]$

$= 2R_v(0) - 2R_v(5\cdot10^{-4}) = 2\cdot2 - 2\cdot1 = 4 - 2 = 2.$

Si ricordi che: $E[v(t)^2] = \Pi_x = P_x = R_v(0)$.

•Es: calcolare media, correlazione e densità spettrale di $x(t) = V_0 \exp[j(2\pi f_0 t + \Phi)]$. V_0 e Φ sono variabili aleatorie indipendenti. V_0 è complessa, Φ è var. aleatoria uniformemente distribuita tra $-\pi \leftrightarrow \pi$.

$$E[x(t)] = E[V_0 \exp(j(2\pi f_0 t + \Phi))] = E[V_0]\cdot E[\exp(j(2\pi f_0 t+\Phi))] = m_{V_0}\cdot E[\exp(j(2\pi f_0 t + \Phi))].$$

Siccome:

$$\exp(j(2\pi f_0 t + \Phi)) = e^{j(2\pi f_0 t + \Phi)} = \cos(2\pi f_0 t + \Phi) + j\,\text{sen}(2\pi f_0 t + \Phi)$$

si ha che $E[x(t)] = m_{V_0}\cdot E[\cos(2\pi f_0 t + \Phi) + j\,\text{sen}(2\pi f_0 t+\Phi)]$. Siccome però il processo è continuo si ha:

$$E[\cos(2\pi f_0 t + \Phi) + j\,\text{sen}(2\pi f_0 t + \Phi)] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \Phi) + j\,\text{sen}(2\pi f_0 t + \Phi)\,\frac{1}{2\pi}\,d\Phi = 0$$

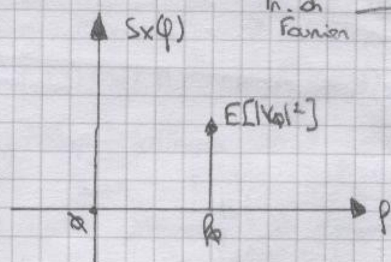
Quindi si ha: $m_x(t) = m_{V_0} \cdot 0 = 0$. Analogamente: $R_x(t,t+\tau) = E[V_0 \cdot \exp(j(2\pi f_0 t + \Phi)) \cdot V_0 \exp(-j(2\pi f_0 (t+\tau) + \Phi))] \Rightarrow S_x(f) = F[R_x(\tau)]$

Infatti:

$$R_x(\tau) = E[|V_0|^2] \cdot E[\exp(j(2\pi f_0 t + \Phi)) \cdot \exp(-j(2\pi f_0 (t+\tau) + \Phi))] =$$

$$= E[|V_0|^2] \cdot E[e^{j(2\pi f_0 t + \Phi)} \cdot e^{-j(2\pi f_0 t + \tau) + \Phi)}] = E[|V_0|^2] \cdot E[e^{\cancel{j2\pi f_0 t} - \cancel{j 2\pi f_0 t} - j2\pi f_0 \tau + \cancel{j\Phi} - \cancel{j\Phi}}]$$

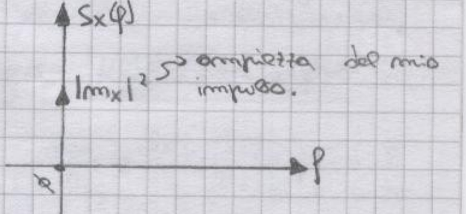
$$= E[|V_0|^2] \cdot E[\underbrace{e^{-j2\pi f_0 \tau}}_{\text{tr. di Fourier} \rightarrow \delta(f - f_0)}]$$



$$\underline{S_x(f) = F[R_x(\tau)]}$$

* Il processo in questione è stazionario sia per la media che per la correlazione $\Rightarrow$ è un processo stazionario in senso lato.

* COROLLARIO: se il processo è stazionario e ha media m_x non nulla, allora tale processo ha un impulso nell'origine.



NB: $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = \delta(f - f_0)$ per le trasformate notevoli di Fourier.

Infatti dalla proprietà di traslazione si ha:

$$\begin{cases} s(t)e^{+j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} S(f - f_0) \\ s(t)e^{-j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} S(f - f_0) \end{cases}$$

Nell'esempio si è posto $\underline{s(t) = 1}$.

*Infatti se $m_x \neq 0$ ma $S_x(f)$ non ha impulsi nell'origine si ha:

Supponiamo:

$$\underline{y(t) = x(t) - m_x(t)}$$

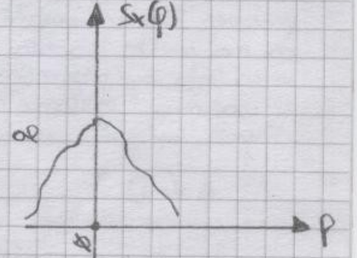
In breve tolgo una costante al processo. Quindi:

$$\underline{R_y(\tau) = \dots = R_x(\tau) - |m_x|^2}$$

e trasformando secondo Fourier si ha:

$$\underline{S_y(f) = S_x(f) - |m_x|^2 \delta f}$$

e per $f = 0 \Rightarrow S_y(f)$ è sicuramente negativa.



(ASSURDO!!)

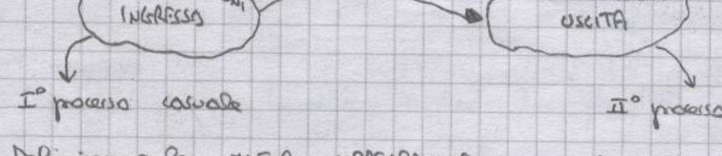
Consideriamo un sistema lineare:

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

integrale di convoluzione.

Il legame I/O è: $\underline{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau}$

Schematicamente ho:



NB: $y(t) = x(t) * h(t)$

Definiamo la MUTUA CORRELAZIONE come la correlazione tra il processo di uscita e quello di entrata.

$$R_{yx}(t_1,t_2) = E[y(t_1) x^*(t_2)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t_2) \cdot x(\alpha) g(t_1 - \alpha) d\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\alpha, t_2) \cdot g(t_1 - \alpha) d\alpha = g(t_1) * R_x(t_1,t_2)$$

Calcoliamoci ora $R_y(t_1,t_2)$:

$$R_y(t_1,t_2) = E[y(t_1) y^*(t_2)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t_1) x(\alpha)^* g(t_2 - \alpha) d\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(t_1, \alpha) \cdot g^*(t_2 - \alpha) d\alpha =$$

$$= g(t_1) * R_x(t_1, \alpha) * g(t_2)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{g(t)} \rightarrow y(t)$$

NB: qui ho chiamato $g(t)$ quello che è $h(t)$.

Quindi: $R_{yx}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\alpha, t_2) \cdot g(t_1 - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\alpha, \alpha - \beta) \cdot g(t_1 - \alpha) d\alpha =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\beta) \cdot g(\tau - \beta) d\beta = R_{yx}(\tau) \quad \text{con } \underline{\tau = t_2 - t_1}$$

NB: $\left.\begin{matrix} t_2 = \alpha - \beta \\ t_2 = t_1 - \tau \end{matrix}\right\}$ ipotesi

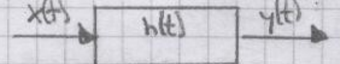
* Quindi: $R_y(t_1, t_1 - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(t_1, \alpha) \cdot g^*(t_2 - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau - \beta) g^*(-\beta) d\beta$

$$= g^*(-\tau) * R_x(\tau) * g(\tau) = \underbrace{R_y(\tau)}_{\text{dipende solo da } \tau}$$

NB: $\underline{R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1, t_1 - \tau) \text{ e } R_y(t_1,t_2) = R_y(t_1, t_1 - \tau)}$

Si ricordi che: $g^*(\gamma) * g^*(-\gamma) \xleftrightarrow{F} |G(f)|^2 = G(f)^* \cdot G(f)$ e quindi: $S_y(f) = S_x(f) \cdot G(f)^* \cdot G(f) = S_x(f) \cdot |G(f)|^2$

Quindi se ho un sistema lineare di questo tipo:



con $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\gamma)\, x(\gamma)\, d\gamma$

si ha che la media di $y(t)$ è:

$m_y(t) = g(t) * m_x(t)$. Se $X(t)$ è un processo stazionario, si ottiene: $m_x(t) = m_x$ e quindi anche $y(t)$ è un processo stazionario. Dunque:

$m_y = m_x \cdot H(0)$ → tr. di Fourier di $h(t)$

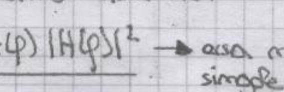
Per quanto riguarda la correlazione si ha:

$$R_y(t_1,t_2) = E[y(t_1)\, y(t_2)^*] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t_1)\, X(\alpha)^*\, h(t_2-\alpha)^*\, d\alpha\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(t_1,\alpha)\, h(t_2-\alpha) = h(t_1) * R_x(t_1,t_2) * h(t_2)^*$$

Quindi un sistema lineare mantiene la stazionarietà in senso lato. Per la densità spettrale di potenza abbiamo visto che:

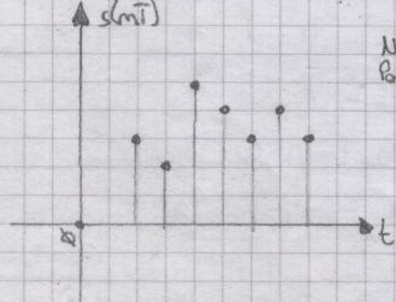
$S_y(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2$ → essa mi dice come si divide statisticamente la potenza alle singole frequenze.

Per esempio:



$\Rightarrow P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)\, df = \int_{f_1}^{f_2} S_x(f)\, df$ → ci dice quanta potenza cade nel nostro processo

Esistono vari tipi di processi. Sia $x(t)$ un generico processo. Se $S_x(f)$ = costante, allora $x(t)$ è un processo bianco perché ha la distribuzione statistica delle potenze costante. Un altro processo da noi molto usato è il PROCESSO GAUSSIANO. Per tali processi la stazionarietà in senso stretto e in senso lato si equivalgono. Inoltre le trasformazioni lineari conservano la gaussianità. Oltre ai processi continui esistono anche i processi discreti. Nei processi discreti le realizzazioni sono funzioni discrete. Quindi:



Normalizzando si ha: $s(nT) \to s(n)$ con $T=1$.

Per i processi discreti valgono le stesse relazioni:

- $m_x(n)$ → MEDIA
- $R_x(n_1,n_2)$ → $E[X_{n_1} X_{n_2}^*] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a b^*\, f_{X_{n_1} X_{n_2}}(a,b)\, da\, db$
- $C_x(n_1,n_2) = E[(X_{n_1} - m_x(n_1))(X_{n_2} - m_x(n_2))^*]$
- σ_n^2 → VARIANZA
- $P_x(n)$ → POTENZA STATISTICA.

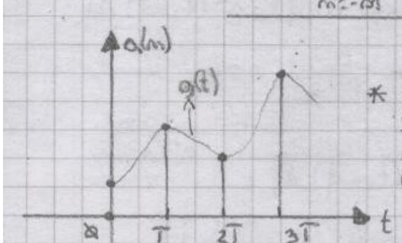
In particolare:

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(n)\, e^{-j2\pi f n} \Rightarrow P_x = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f)\, df = \int_0^1 S_x(f)\, df = R_x(0) = E[|x(t)|^2].$$

Noi sappiamo che per trasmettere una serie di dati bisogna generare a priori una serie di impulsi ognuno con ampiezza direttamente proporzionale al dato da trasmettere. Questa tecnica prende il nome di PAM (Pulse Amplitude Modulation). Se trasmettiamo un dato ogni T secondi abbiamo:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\, g(t-nT)$$

dove $\begin{cases} a(n): \text{VALORI DA TRASMETTERE} \\ g(t): \text{FORMA D'ONDA BASE} \end{cases}$



* Se $a(n)$ è un processo discreto, allora anche $X(t)$ lo è (processo CONTINUO). Supponiamo che $a(n)$ sia stazionario. In generale $X(t)$ non è un processo stazionario perché $m_x(t)$ risulterà periodica di periodo T, come anche $R_x(t_1,t_2)$. Quindi:

$m_x(t) = m_x(t+T)$

$R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2+T)$ → PROCESSI CICLO STAZIONARI.

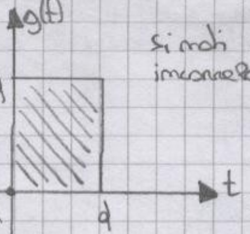
Per esempio: $y(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t)$ è un processo ciclostazionario. Perché $X(t)$ possa diventare un processo stazionario è necessario scrivere $X(t)$ in questo modo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)\, g(t-nT-\vartheta)$$

con ϑ: VARIABILE ALEATORIA uniformemente distribuita tra $-T/2$ e $T/2$.

* si ricordi che il ricevente riceve il segnale, ma non sa da dove inizia. Quindi questa fase iniziale ϑ è corretta.

Supponiamo ora che $a(n)$ abbia media nulla e varianza δ^2, e siano incorrelate tra loro.
Sia $g(t)$ un impulso rettangolare di questo tipo:



Si noti che base minore o uguale a T, proprio per il fatto che gli $a(n)$ sono incorrelati tra loro. Quindi:

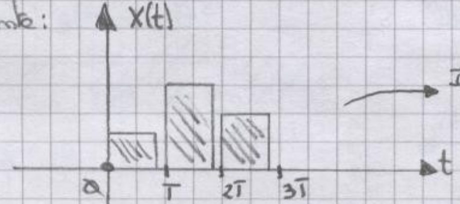
$$\underline{(d \le T)}$$

- $m_a = 0$
- $R_a(k) = \begin{cases} \delta^2 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$

* Sia p la probabilità che l'istante considerato presenti un impulso. Quindi:

$$\underline{p = d/T}$$

Graficamente:

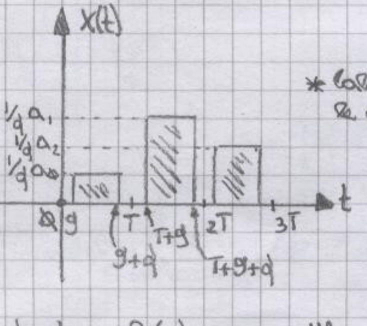


In pratica ho considerato la prima $g(t)$, e cioè: $\underline{g(t-nT)}$, senza l'uso di ϑ.

Però si ricordi che noi la fase iniziale non la conosciamo, cioè non sappiamo l'origine di $g(t)$.

$\Downarrow$

Considerando la $g(t)$ sopra riportata si ha:



* Calcolo la media di $X(t)$ e ottengo zero. Invece per la funzione di correlazione le cose si complicano:

$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \Rightarrow$ • $\underline{|\tau| \le d}$, la probabilità che t_1 e t_2 cadano all'interno di un impulso è:

$$\underline{p = \frac{d}{T}\left(1 - \frac{|\tau|}{d}\right)}$$

$\Downarrow$

$$R_X(\tau) = \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 \left(\frac{d}{T}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{d}\right)$$

• $\underline{|\tau| > d \Rightarrow R_X(\tau) = 0}$

NB: l'evento $A = \{t_1 \text{ e } t_2 \text{ cadono dentro lo stesso impulso}\}$ si verifica quando:

- $\vartheta < t_1$ e $\vartheta + d > t_2$ (1°)

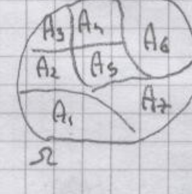
  oppure
- $\vartheta < t_2$ e $\vartheta + d > t_1$ (2°)

prob. congiunta.

Quindi:

$$2 \Rightarrow p = \int_{t_2-d}^{t_1} P[A|\vartheta = a]\, f_\vartheta(a)\,da = d/T\left(1 - \frac{|\tau|}{d}\right) \quad \underline{1° \text{ CASO}}$$

Infatti:



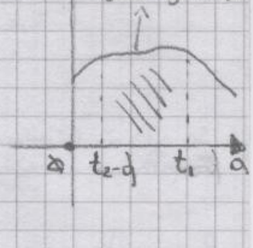
A_i = singola partizione di Ω. IL TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE dice che:

$$\underline{P[B] = \sum_{i=1}^{7} P[B|A_i]\,P[A_i]} \quad \text{con } i = 1 \dots 7. \quad \text{e} \quad \underline{\Omega = \bigcup_{i=1}^{7} A_i} \quad \text{e} \quad \underline{A_i \cap A_j = \Phi}$$

Si noti inoltre che: $\underline{B = B \cap \Omega}$. Quindi: $f_\vartheta(a) = \frac{dF_\vartheta(a)}{da} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f_\vartheta(a)\,da = F_\vartheta(\beta) - F_\vartheta(\alpha)$.

Ma:

$$\underline{F_\vartheta(\beta) - F_\vartheta(\alpha) = P[\alpha < a \le \beta]} \Rightarrow \int_{t_2-d}^{t_1} f_\vartheta(a)\,da = F_\vartheta(t_1) - F_\vartheta(t_2-d) \Rightarrow F_\vartheta(t_1) - F_\vartheta(t_2-d) = P[t_2 - d < a \le t_1]$$

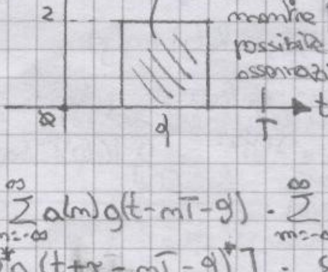


Si ricordi che ϑ è una variabile aleatoria. Ma: $t_2 < \vartheta + d$ e quindi: $t_2 < a + d$ visto che $\underline{\vartheta = a}$.

Analogamente:

prob. che t' cada in $0 \mapsto d \Rightarrow p = d/T$.

Si ricordi infatti che $P = \frac{\#\text{ tentativi riusciti}}{\#\text{ tentativi svolti}}$ $\Rightarrow$



d rappresenta l'intervallo in cui è presente t' mentre T è tutto il possibile intervallo di osservazione.

Nel secondo caso si trova:

$$p = \int_{t_1-d}^{t_2} P[A|\vartheta = a]\, f_\vartheta(a)\,da = \frac{d}{T}\left(1 + \frac{|\tau|}{d}\right)$$

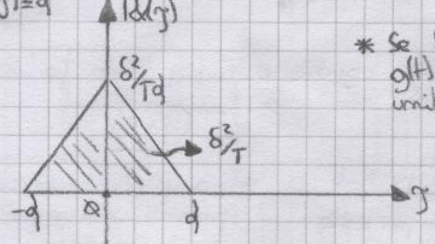
Quindi: $R_X(\tau) = R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\,g(t-nT-\vartheta) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\,g(t+\tau-nT-\vartheta)\right] =$

$= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\,g(t-nT-\vartheta) \cdot a(n)^*\,g(t+\tau-nT-\vartheta)^*\right] = \delta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t-nT-\vartheta) \cdot g(t+\tau -$

o ANTIALIASING.

$-mT-\vartheta)\,d\vartheta$. Posto $x = t-mT-\vartheta \Rightarrow \delta^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{t-mT-T}^{t-mT} g(x)\cdot g(x+\tau)\,dx = R_x(\tau) \Rightarrow$ processo stazionario.

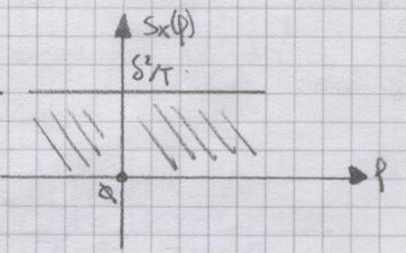
Quindi:
$$R_x(\tau)=\begin{cases}\frac{\delta^2}{Td}\left(1-\frac{|\tau|}{d}\right), & |\tau|\le d\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$



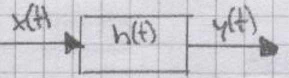
NB: Per $d \to 0$ si ha:

* Se facciamo tendere d a zero, si ottiene che g(t) tende ad un impulso ideale di area unitaria. Quindi:
$$R_x(\tau)=\frac{\delta^2}{T}\delta(\tau)$$

Siccome $S_x(f)=F[R_x(\tau)] \Rightarrow S_x(f)=\frac{\delta^2}{T}$.



Quindi se ho un sistema di questo tipo:



Ottengo:
$$S_y(f)=S_x(f)\,|H(f)|^2=\frac{\delta^2}{T}|H(f)|^2$$

Un caso interessante si ha quando $g(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)} \Rightarrow G(f)=T\,Rect(fT) \Rightarrow Rect(f)=\begin{cases}1\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

In questo caso si ha:
$$S_x(f)=\begin{cases}\delta^2 T & -\frac{1}{2T}\le f\le \frac{1}{2T}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Rimuoviamo ora l'ipotesi che a(n) sia un processo stazionario bianco. Si ha:
$$R_x(\tau)=E\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\,g(t-mT-\vartheta)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)^*\, g^*(t+\tau-nT-\vartheta)\Big]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a(n-m)\,E\big[g(t-mT-\vartheta)\cdot g^*(t+\tau-nT-\vartheta)\big]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a(n-m)\frac{1}{T}\int_0^T g(t-mT-\vartheta)\cdot g^*(t+\tau-nT-\vartheta)\,d\vartheta$$

Sostituendo: $v=t-mT-\vartheta \Rightarrow R_x(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a(n-m)\frac{1}{T}\int_{t-mT}^{t-mT+T} g(v)\cdot g^*(v+\tau+(m-n)T)\,dv$

Sostituendo: $k=n-m \Rightarrow R_x(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{t-mT}^{t-mT+T} g(v)\cdot g^*(v+\tau-kT)\,dv=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g(v)\cdot g^*(v+\tau-kT)\,dv=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\frac{1}{T}\,C_g(\tau-kT)$

Quindi C_g è L'AUTOCORRELAZIONE del segnale g(t). Nel caso che g(t) sia un impulso rettangolare di area unitaria e base d, si ha:
$$C_g(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{d}\left(1-\frac{|\tau|}{d}\right), & |\tau|<d\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$$

Facendo tendere d a zero si ha:
$$\begin{cases}\lim_{d\to 0} g(t)=\delta(t)\\ \lim_{d\to 0} C_g(t)=\delta(\tau)\end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$R_x(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\frac{1}{T}\delta(\tau-kT)$$

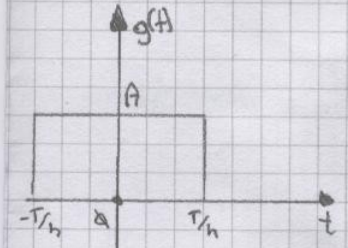
Se g(t) è l'impulso base desiderato, possiamo scrivere:
$$R_x(\tau)=\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\frac{1}{T}\delta(\tau-kT)\Big]*g^*(-\tau)*g(\tau)$$

Infatti si ricordi che:
$$R_y(\tau)=g^*(-\tau)*R_x(\tau)*g(\tau)$$

Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza si ha:
$$S_x(f)=\frac{1}{T}|G(f)|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\,e^{-j2\pi f kT}=\frac{1}{T}|G(f)|^2 S_a(f)$$

Vediamo un esempio:

* Calcolare la densità spettrale di potenza, per un processo PAM, quando $g(t)$ è:



$$R_a(m) = \begin{cases} A^2/2 & , m=0 \\ A^2/h & , m\neq 0 \end{cases}$$

Per essere più precisi si ha:

$$R_a(k) = E[a(m)\,a(m-k)] = \begin{cases} E[a(m)^2] & \text{per } k=0 \\ E[a(m)\,a(m-k)] & \text{per } k\neq 0 \end{cases}$$

NB: $E[a(m)] = A/2$

$Var[a(m)] = \frac{A^2}{h}$ $\rightarrow$ $S_y(f) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k)\frac{1}{T} e^{-j2\pi f k T}\right]\cdot |H(f)|^2$

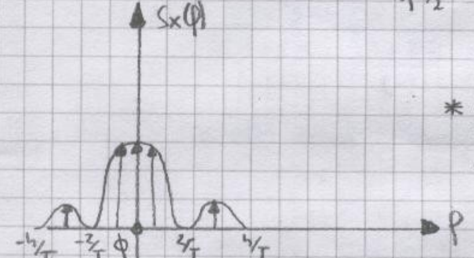
$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\, g(t-mT-\vartheta)$$

* Siccome: $R_a(k) = \frac{A^2}{h}\delta(k) + \frac{A^2}{h}$ $\rightarrow$ $S_y(f) = \left[\frac{1}{T}\frac{A^2}{h} + \frac{A^2}{h}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overset{\delta(k)}{V_a} e^{-j2\pi f k T}\right]\cdot |H(f)|^2 =$

$$= \left[\frac{1}{T}\frac{A^2}{h} + \frac{1}{T}\frac{A^2}{h}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)\right]\cdot |H(f)|^2 = \left[\frac{1}{T}\frac{A^2}{h} + \frac{1}{T^2}\frac{A^2}{h}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)\right]$$

NB: $G(f) \equiv H(f)$ e $G(f) = \frac{T}{2}\frac{\operatorname{sen}(\pi f T/2)}{\pi f T/2}$

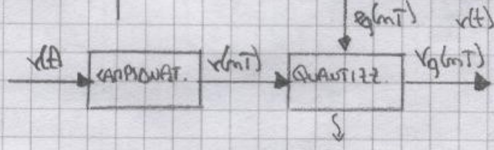
$$\cdot \frac{T^2}{h}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2} = \frac{TA^2}{16}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2} + \frac{A^2}{16}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi m/2)}{(\pi m/2)^2}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$



* Consideriamo ora un segnale $x(t)$ a banda limitata $(-f_m \div f_m)$. Vogliamo campionarlo rispettando il teorema del campionamento e quindi:

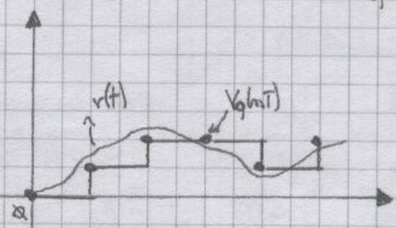
$$f_c = \frac{1}{T} > 2f_m$$

Attraverso l'operazione di campionamento, si passa dal segnale $x(t)$ al segnale $x(mT)$. Noi sappiamo che:



è un blocco non lineare.

quindi: $V_q(mT) = x(mT) + e_q(mT)$ $\rightarrow$ campioni dell'errore di quantizzazione.



Sia $x(t)$ il processo rappresentante l'insieme degli errori di quantizzazione:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_q(mT+\gamma)\cdot T\cdot\delta(t-mT-\gamma)$$

dove γ è una variabile aleatoria distribuita tra $0 \div T$. Siccome rispettiamo il teorema del campionamento, si ha:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_q(mT)\cdot T\cdot\delta(t-mT-\gamma)$$

* Assumiamo che: $E[e_q(mT)] = 0$

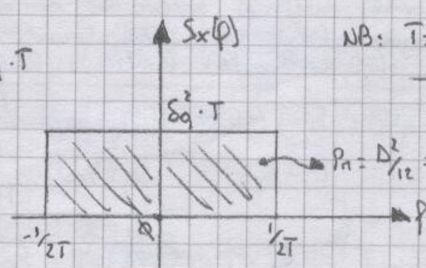
$$R_q(k) = E[e_q(mT)\,e_q((m-k)T)] = \begin{cases}\delta_q^2 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } k\neq 0\end{cases}$$

Per definizione $\delta_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ dove Δ è il PASSO DI QUANTIZZAZIONE. Si ricordi che per quanto riguarda il filtro di ricostruzione viene usata la seguente risposta all'impulso:

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen}\pi t/T}{\pi t/T}$$

NB: I campioni dell'errore di quantizzazione sono incorrelati.

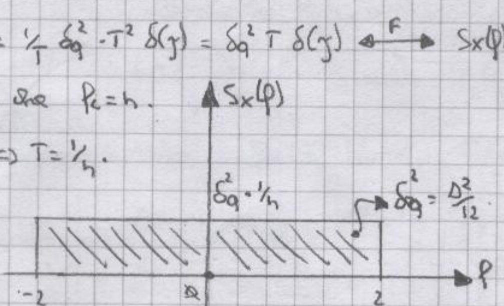
Dunque: $R_x(\tau) = \frac{1}{T}\delta_q^2\cdot T^2\,\delta(\tau) = \delta_q^2\,T\,\delta(\tau) \xleftrightarrow{F} S_x(f) = \delta_q^2\cdot T$



NB: $T = \frac{1}{f_c}$

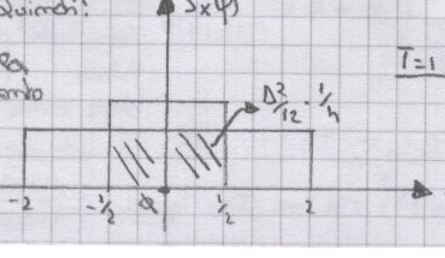
Assumiamo ora che $f_c = h$.

$f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow h = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{h}$.



Però a noi interessa la banda compresa tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Quindi:

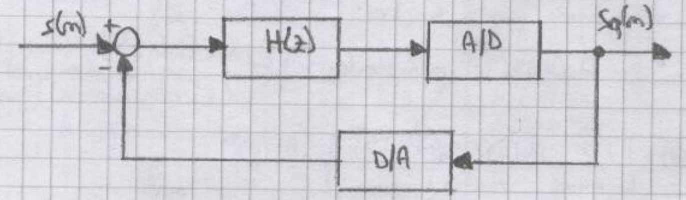
* Quindi se quadruplico la frequenza di campionamento guadagno un fattore h su S/N_q.



$T=1$ $\rightarrow$ NORMALIZZAZIONE.

* Quindi attraverso un FILTRAGGIO NUMERICO ho considerato solo la banda di interesse e ho eliminato e_q.

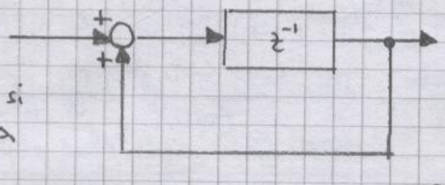
Quindi a partire da un quantizzatore a pochi bit, è possibile ottenerne uno con più bit sovracampionando il segnale. Questa operazione è però costosa.
Consideriamo:



NB: A/D = Quantizzatore + ~~codificatore~~.

D/A = decodificatore.

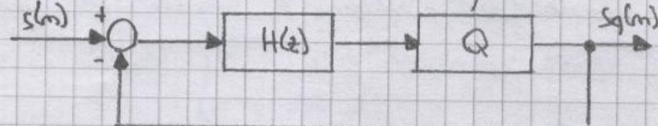
Si noti che $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$ → funzione di integratore per i segnali campionati. Quindi:



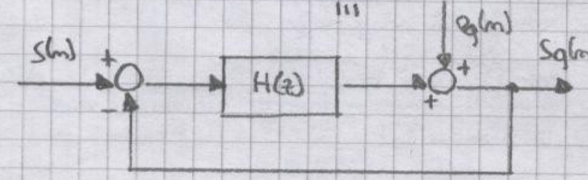
NB: A/D e D/A si "elidono" a vicenda.

Infatti: $L(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{z^{-1}/1-z}{1+z^{-1}/1-z} = \frac{\frac{z^{-1}}{1-z}}{\frac{1-z+z^{-1}}{1-z}} = \frac{z^{-1}}{1-z+z^{-1}} = L'(z)$

Quindi:



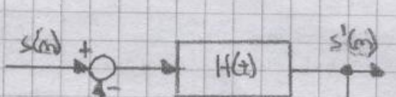
|||



NB: $Sq(n) = S(n) + eq(n)$ ← viene introdotto dal quantizzatore.

* In questo modo il circuito è compensato mente l'errore;

Analizziamo $\frac{s'(z)}{S(z)}$ e poi $\frac{eq'(z)}{eq(z)}$.



$\frac{s'(n)}{s(n)} = \frac{H(z)}{1+H(z)}$

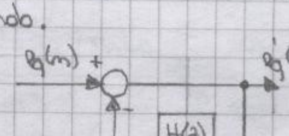
Per essere più precisi:

$$\frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{S'(z)}{S(z)} \Rightarrow S(z)\cdot\frac{H(z)}{1+H(z)} = S'(z) \Rightarrow S'(z) = z^{-1}S(z) \Rightarrow \frac{s'(z)}{S(z)} = z^{-1}$$

Quindi:

$H_S(f) = e^{-j2\pi f}$ → il rapporto è un semplice ritardo.

Per quanto riguarda l'errore di quantizzazione si ha:

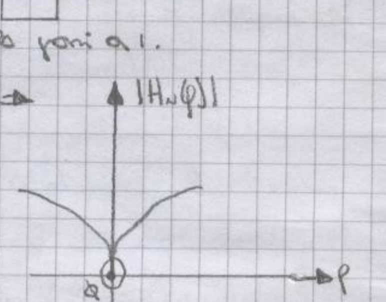


Quindi:

$$\frac{eq'(n)}{eq(n)} = \frac{1}{1+H(z)} = \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} \Rightarrow \frac{eq'(n)}{eq(n)} = \frac{1}{1/1-z^{-1}} = 1-z^{-1}$$

→ ha modulo pari a 1.

Chiamiamo $H_N(t) = 1-z^{-1} \Rightarrow H_N(f) = 1-e^{-j2\pi fT} = (2j\,e^{-j2\pi fT/2})\cdot \mathrm{Sen}(\pi f T)$ →



Lo scopo è quindi quello di cercare di annullare l'errore di quantizzazione alle frequenze più vicine all'origine.
(SHAPING IN FREQUENZE DEL RUMORE DI QUANTIZZAZIONE).

Si noti che $S'_q(f) = \delta^2\cdot T\cdot 4\,\mathrm{Sen}^2(\pi f T)$ mentre:

$$P'_q = \int_{-f_m}^{f_m} S_q(f)\,df = \int_{-f_m}^{f_m} \delta^2\cdot T\cdot 4\,\mathrm{Sen}^2(\pi f T)\,df$$

Quindi:

$$P'_q = \int_{-f_m}^{f_m} \delta_q^2\cdot T\cdot 4(\pi f T)\,df = \delta_q^2\cdot T^3\pi^2 4\left[\frac{f^3}{3}\right]_{-f_m}^{f_m} = \delta_q T^3\pi^2 8\frac{f_m^3}{3} =$$

$$= \delta_q^2\pi^2\frac{8}{3}\left(\frac{f_m}{1/T}\right)^3 = \delta_q^2\pi^2\frac{1}{3}\left(\frac{2f_m}{f_c}\right)^3 = \delta_q^2\cdot 3{,}3\cdot R^{-3}.$$

dove R = FATTORE DI SOVRACAMPIONAMENTO = $2\left(\frac{f_c}{2f_m}\right)$.

Infatti:

$$\frac{P'_q}{\delta_q^2} = \frac{3{,}3}{R^3} \Rightarrow \frac{3{,}3}{R^3} = 1/256 \Rightarrow \underline{R \cong 9{,}4}$$

* Per esempio: $\frac{P'_q}{\delta_q^2} = \frac{3{,}3}{R^3}$, e per ridurre di un fattore 4 il rumore di quantizzazione devo avere $R \cong 9{,}4$.

NB: $S/N = 2^{2N}$ con N = #bit utilizzati ⇒ $2^{2\cdot 4} = 2^8 = 256$ ⇒ Ip: $\underline{P_q = 1}$.

* questi quantizzatori vengono detti SIGMA-DELTA. Qui campionando a frequenza elevata non c'è bisogno del

F115