$$\boxed{\int_T f(x,y)\,dT = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx}$$

Percorrendo però il dominio nel senso opposto si ha:

$$\begin{cases} \widehat{CAD}: & y = \gamma(x) \\ \widehat{CBD}: & y = \delta(x) \end{cases} \Rightarrow T = \begin{cases} a \le x \le b \\ \gamma(x) \le y \le \delta(x) \end{cases}$$

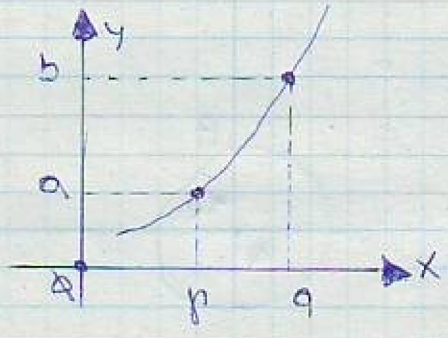
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_T f(x,y)\,dT = \int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy}$$

Quest'ultima formula prende il nome di formula di inversione dell'ordine di integrazione. Supponiamo ora di avere $f(x,y) = -f(x,y)$. In questo caso $f(x,y)$ è una funzione pari. Si ha dunque una simmetria e questo comporta che:

$$\boxed{\int_T f(x,y)\,dT = 2\int_T f(x,y)\,dT}$$

A volte può risultare comodo cambiare le coordinate da cartesiane a polari. Sia $y = f(x)$ una funzione:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{cases}$$

Si noti come è facile cambiare le variabili. Analogamente:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Introduciamo la matrice di Jacob.

$$J = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

Siano dunque $f_1(x_1 \ldots x_n)$, $f_2(x_1 \ldots x_n)$ due generiche funzioni. Costruendo la matrice jacobiana si ha:

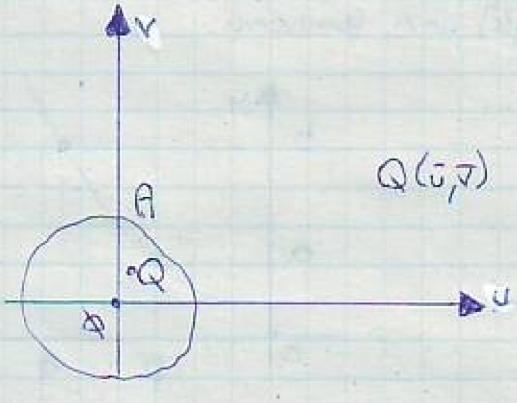
$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \ldots \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \ldots \end{bmatrix}$$

Dunque l'integrale precedente si può riscrivere così:

$$\boxed{\int_T f(x,y)\, dT = \int_T f(x,y)\, dx dy = \int_J f(x(u,v), y(u,v))\, |J|\, du dv.}$$

dove $dJ = |J|\, du dv$. È possibile passare dal piano xy al piano uv effettuando la seguente trasformazione:

$$T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{x} = x(\bar{u},\bar{v}) \\ \bar{y} = y(\bar{u},\bar{v}) \end{cases}$$

$Q(\bar{u},\bar{v})$

T è la trasformazione che trasforma le coordinate del punto Q in coordinate del punto P. P viene detto il trasformato di Q, e si scrive:

$$\boxed{P = T(Q)}$$

Vettorialmente si può scrivere:

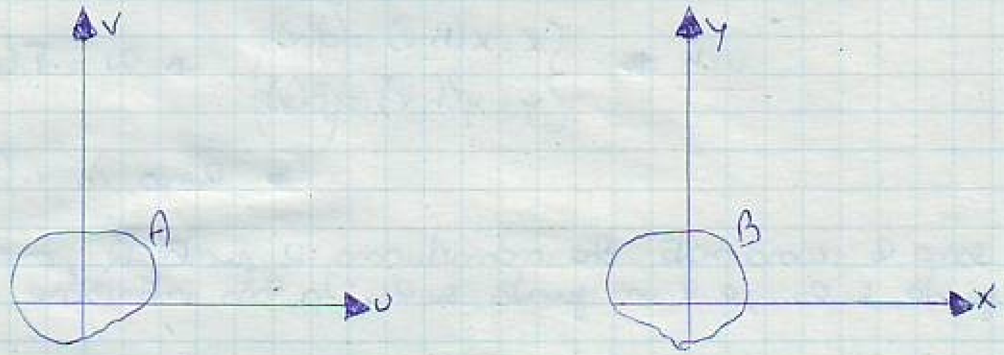
$$\vec{P} = \vec{O} + x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j}$$

Sia ora T una trasformazione regolare piana:

$$T = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

vediamo alcune proprietà:

1) Se A è un campo connesso, anche B lo è:

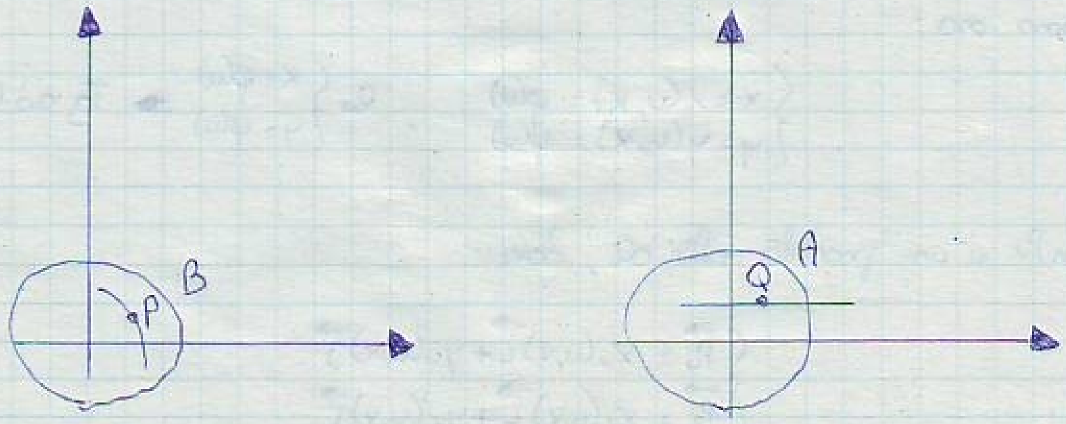


2) Se $B = T(A)$ è una corrispondenza biunivoca, allora questa è una corrispondenza biunivoca in grande. Nel caso che:

allora si ha una corrispondenza biunivoca in piccolo.

3) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ in tutto A.

Prendiamo ora in esame il seguente caso:



Siano l_u e l_v delle linee dette linee curvilinee ed u, v le coordinate dette coordinate curvilinee. Nel caso precedente:

$$\begin{cases} x = x(u,k) = \varphi(u) \\ y = y(u,k) = \psi(u) \end{cases} \qquad \text{con } v = k$$

$\rightarrow$ linea di u (l_u).

Si noti che:

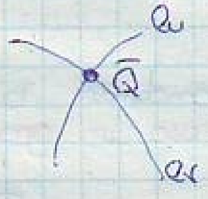
$$l_u = T(v = k)$$

Analogamente:

$$u = h \Rightarrow \begin{cases} x = x(h,v) = \alpha(v) \\ y = y(h,v) = \beta(v) \end{cases} \rightarrow l_v = T(u = h)$$

$\rightarrow$ linea di v (l_v).

u, v sono le coordinate che individuano il punto $\bar{Q}$, ma in realtà u individua un punto su l_u, e v un punto su l_v. La loro intersezione individua il punto $\bar{Q}$.



Se la trasformazione è regolare si ha:

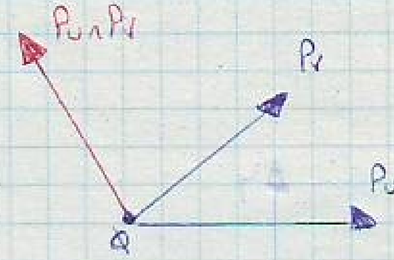
1) Per ogni punto passa una e una sola l_u e l_v.
2) 2 linee l_v e 2 linee l_u non si intersecano mai
3) l_u e l_v sono linee regolari
4) le due linee formano un angolo sempre diverso da zero.

Siano ora:

$$\begin{cases} x = x(u,k) = \varphi(u) \\ y = y(u,k) = \psi(u) \end{cases}, \quad l_u \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \end{cases} \Rightarrow \text{Tg ad } l_u: \begin{cases} \varphi'(u) = \dfrac{\partial x(u,k)}{\partial u} \\ \psi'(u) = \dfrac{\partial y(u,k)}{\partial u} \end{cases}$$

$P_u \wedge P_v$ è un prodotto vettoriale, dove:

$$\begin{cases} \vec{P_u} = x_u(u,v)\vec{i} + y_u(u,v)\vec{j} \\ \vec{P_v} = x_v(u,v)\vec{i} + y_v(u,v)\vec{j} \end{cases}$$

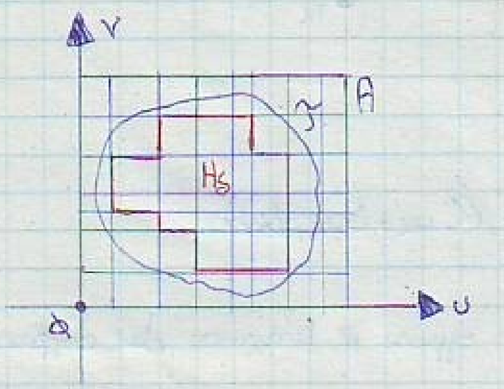


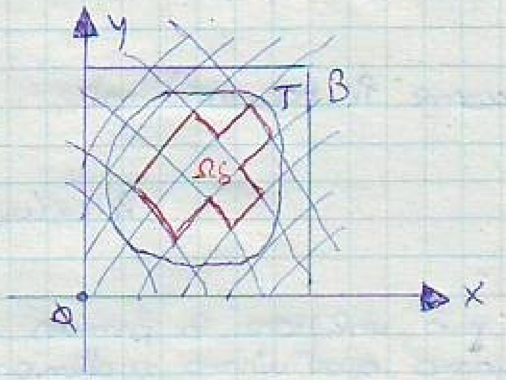
le linee P_u e P_v sono regolari se e solo se: $\begin{cases} |P_u| \neq 0 \\ |P_v| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |P_u \wedge P_v| \neq 0$

dove:

$$P_u \wedge P_v = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Prendiamo ora in esame la seguente situazione:





$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ regolare $\overrightarrow{AB}$ con $\gamma \subset A$ e $T \subset B$ con $T = T(\gamma)$

Sia T^{-1} la trasformazione inversa, si ha:

$$\boxed{\gamma = T^{-1}(T)}$$

$T(H_\delta) = \Omega_\delta$ con:

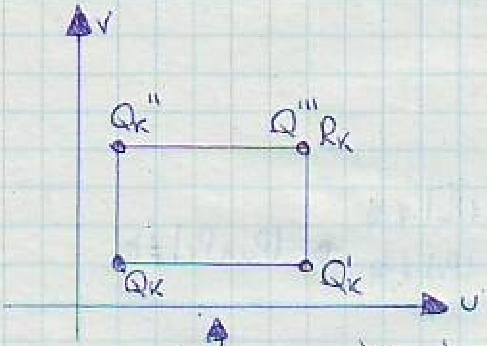
$\begin{cases} H_\delta = R_1 \cup \dots \cup R_m \\ \Omega_\delta = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m \end{cases}$, dove $\begin{cases} d = \text{diametro di } R_m \\ \delta = \text{diametro di } \Omega_m \end{cases}$

$\Downarrow$

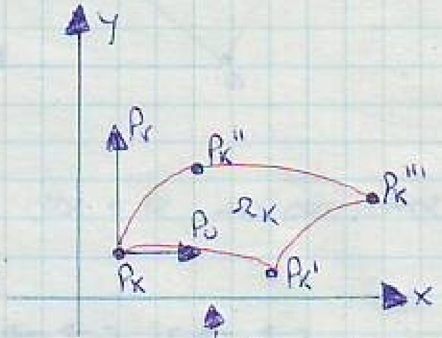
$\lim_{d \to 0} \delta = 0$, $\lim_{\delta \to 0} d = 0$

$$A(\Omega_6) = \sum_{1}^{m}{}_K A(\Omega_K)$$

$$\Omega_K = T(R_K)$$

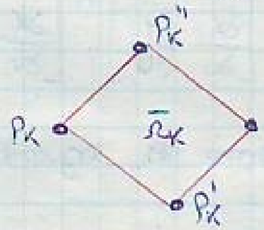


Ingrandimento di un rettangolino.



Approssimazione di un rettangolo.

$$\begin{cases} Q_K(u_K, v_K) \\ Q'_K(u_K+\Delta u_K, v_K) \\ Q''_K(u_K, v_K+\Delta v_K) \end{cases}$$



$$A(\bar{\Omega}) = \left| (P'_K - P_K) \wedge (P''_K - P_K) \right|$$

Siccome P'_K ha coordinate:

$$P'_K(x(u_K+\Delta u_K, v_K), y(u_K+\Delta u_K, v_K)).$$

, si può utilizzare la formula di Taylor oppure il teorema del differenziale totale. Usiamo quest'ultimo e otteniamo:

$$(P'_K - P_K) = (P'_K(Q'_K) - P_K(Q_K)) = P_u(Q_K)\cdot \Delta u_K \Rightarrow P_u(Q_K)\Delta u_K + \omega$$

valore arbitrario

Infatti:

$$\lim_{Q'_K \to Q_K} \frac{\omega}{\overline{Q'_K Q_K}} = 0$$

Analogamente:

$$(P''_K - P_K) = (P''_K(Q''_K) - P_K(Q_K)) = P_u(Q_K)\cdot \Delta u_K + P_v(Q_K)\cdot \Delta v_K + \omega_2$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{Q''_K \to Q_K} \frac{\omega_2}{\overline{Q''_K Q_K}} = 0$$

Dunque:

$$|(P_k' - P_k) \wedge (P_k'' - P_k)| = |[(P_u(Q_k)\Delta u_k + \omega) \wedge (P_v(Q_k)\Delta v_k + \omega_1)]| =$$

$$= |P_u \wedge P_v|\,\Delta u_k \Delta v_k + \underbrace{\{\dots\}}_{\omega_k \to 0 \text{ quando } \lim = 0}$$

Dunque:

$$|(P_k' - P_k) \wedge (P_k'' - P_k)| = A(\Omega) = |P_u(Q_k) \wedge P_v(Q_k)|\,\Delta u_k \Delta v_k + \omega_k$$

quantità approssimata

Effettuando la somma di tutte le aree di tutti i rettangoli si ha:

$$A(\Omega_\delta) = \sum_{1}^{m}{}_k \underbrace{|P_u(Q_k) \wedge P_v(Q_k)|}_{F(u_k, v_k)}\,\Delta u_k \Delta v_k + \underset{\to 0}{\omega_k}$$

Tale somma viene detta somma integrale ($S\delta^*$) estesa a Π_δ internamente associata a $\mathcal{T}$. Quindi:

$$\lim_{\delta \to 0} S\delta^* = \int_{\mathcal{T}} |P_u \wedge P_v|\,du\,dv = \lim_{\delta \to 0} A(\Omega_\delta) = A(T)$$

L'area $A(T)$ in coordinate cartesiane è:

$$A(T) = \int_T dx\,dy = \int_{\mathcal{T}} |P_u \wedge P_v|\,du\,dv = \int_{\mathcal{T}} |J|\,du\,dv$$

Graficamente si ha.