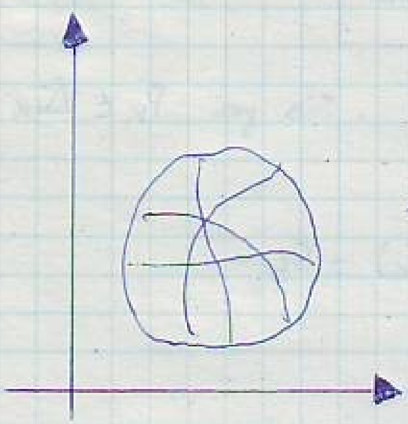
7) $\left| \int_T f \, dT \right| \leq \int_T |f| \, dT$

8) Sia $z = f(x,y)$ una generica funzione $\in C^0(T)$, quadrabile in (x,y).



$T = \Delta T_1 \cup \dots \cup \Delta T_m$

Siano $P_1 \in \Delta T_1$, $P_2 \in \Delta T_2$, ... e sia $\delta = \max \delta \Rightarrow S_\delta = \sum_{1}^{m}{}_K f(P_K) \cdot A(\Delta T_K)$

$\Downarrow$

$\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \int_T f(P) \, dT$

Perciò:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_\varepsilon \circ \delta_\varepsilon > 0 : \left| S_\delta - \int_T f(P) dT \right| < \varepsilon$$

Se $f(P)$ e $\varphi(P)$ sono appartenenti a T e ivi continue, e se $\varphi(P) \geq 0$, allora si ha:

$$\int_T f(P) \varphi(P) \, dT = \lambda \int_T \varphi(P) \, dT$$

dove λ è tale che:

$$m \leq \lambda \leq M \quad , \text{dove: } \begin{cases} m = \text{Min } f(P) \\ M = \text{Max } f(P) \end{cases}$$

Per il teorema della media integrale si ha:

$$m \leq f(\varepsilon) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \sum_{1}^{m}{}_K f(\varepsilon)_K \cdot \delta_K \leq M(b-a)$$

$\Downarrow$

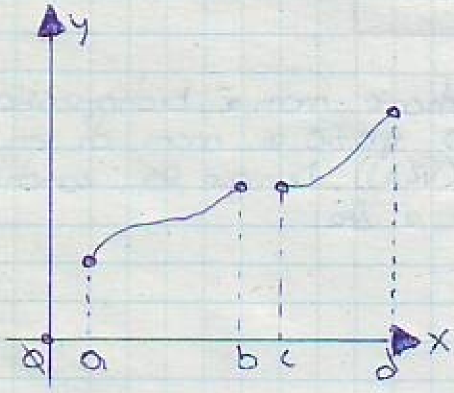
$$m \leq \frac{S_\delta}{b-a} \leq M$$

Dunque:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_T^b f(x)\,dx \leq M$$

Sia $\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow m \leq \lambda \leq M \Rightarrow f(\xi) = \lambda$

Inoltre possiamo affermare che in un insieme connesso, se una funzione è continua, allora assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo. Un esempio di insieme non connesso è il seguente:



Se si aggiunge come ipotesi che T è connesso, il teorema della media integrale si può riscrivere:

$$\lambda = f(P_0) \quad , \quad P_0 \in T$$

$$\Downarrow$$

$$\int_T f(P)\varphi(P)\,dT = f(P_0)\int_T \varphi(P)\,dT \Rightarrow \int_T f(P)\,dT = f(P_0) \cdot A(T)$$

dove $\varphi(P)$ è una funzione detta funzione peso. Prendiamo ora in esame un insieme aperto e limitato T:

$$T = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup \Delta T_1 \cup \dots \cup \Delta T_m$$

$$H = R_1 \cup \dots \cup R_m \rightarrow \text{dominio internamente associato}$$

Siano: $S_\delta = \sum_1^m {}_k\, f(P_k) A(R_k)$

$$S_\delta^* = \sum_1^m {}_k\, f(P_k) \cdot A(\Delta T_k) \Rightarrow \boxed{S_{\delta\,TOT} = S_\delta + S_\delta^*}$$

Inoltre:

$$\lim_{\delta\to 0} S_\delta - S_\delta^* = 0 \Rightarrow \lim_{\delta\to 0} S_\delta = \lim_{\delta\to 0} S_\delta^*$$

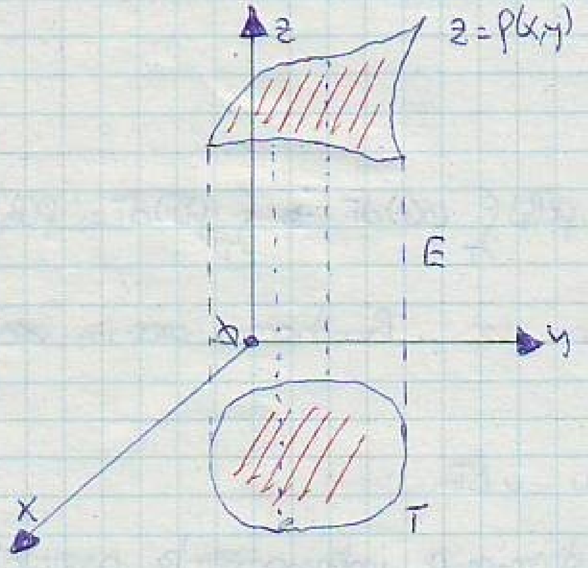
Dunque i due domini sono differenti, ma hanno lo stesso limite in comune. Definiamo ora cosa si intende per insieme cubabile. Un insieme si dice cubabile quando:

$$\boxed{m(\Omega) = m_i(\Omega)}$$

In questo caso la misura in questione non è bidimensionale ma tridimensionale, in quanto si tratta di uno spazio e non di un piano. La misura in questione è il volume di Ω ($V(\Omega)$). Dunque la condizione necessaria e sufficiente perché Ω sia cubabile è che:

$$\boxed{m(F\Omega) = 0}$$

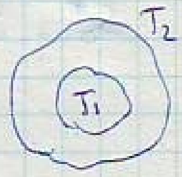
Prendiamo in esame il seguente cilindroide a generatrici parallele all'asse z:



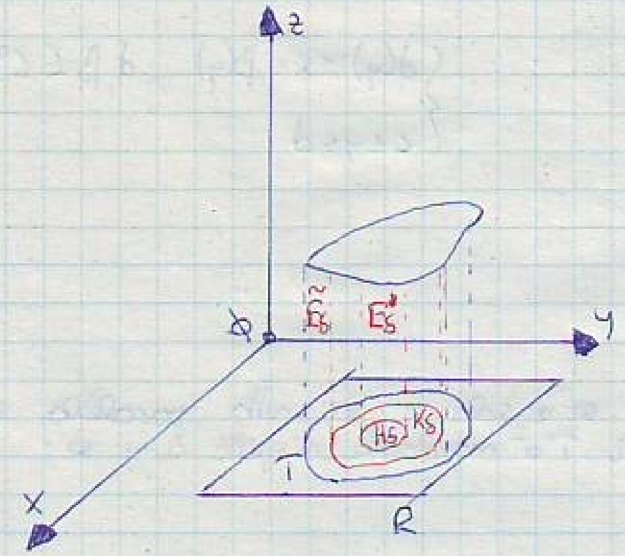
$E = \Omega$

L'insieme E è cubabile, e allora $V(E) = \int_T f(x,y)\,dT$. Si ricordi un'importante proprietà:

1) se $m(T_1) \leq m(T_2) \Rightarrow E_1 \leq E \leq E_2$.



Si noti infine che la base di E è T. Per essere più precisi la precedente proprietà può essere così rappresentata:



$$\begin{cases} E^*_\delta = E_1 = \text{insieme di } H_\delta \\ \tilde{E}_\delta = E_2 = \text{insieme di } K_\delta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$E^*_\delta \leq E \leq \tilde{E}_\delta$$

Sapendo che: $V(E^*_\delta) = \sum_{1}^{m} {}_K \, f(P_K) \cdot A(\Delta T_K)$

$V(\tilde{E}_\delta) = \sum_{1}^{m} {}_K \, f(P_K) \cdot A(R_K)$ $\Rightarrow$ $\boxed{V(E) = \int_T f(x,y)\,dT}$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{1}^{m} {}_K \, f(P_K) \cdot A(\Delta T_K) \leq \int_T f(x,y)\,dT \leq \sum_{1}^{m} {}_K \, f(P_K) \cdot A(R_K)$$

Essendo poi:

$$\begin{cases} V(E^*_\delta) = m_i(E^*_\delta) \\ V(\tilde{E}_\delta) = m_i(\tilde{E}_\delta) \end{cases} \Rightarrow m_i(E^*_\delta) = m_i(E) \leq m(E) \leq m_i(\tilde{E}_\delta)$$

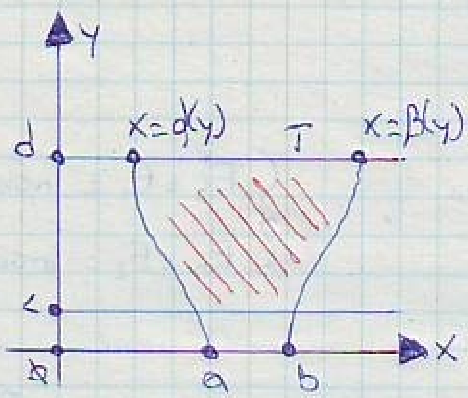
$$\Downarrow$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_T f(P)\,dT \leq m_i(E) \leq m(E) \leq \int_T f(P)\,dT$$

Se $f(x,y) < 0$ si ha che $V(E) = \int_T - f(x,y)\,dT = -\int_T f(x,y)\,dT$. Dunque:

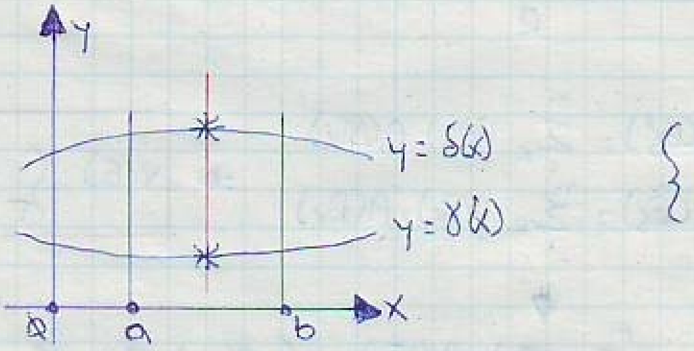
$$-V(E) = \int_T f(x,y)\,dT \Rightarrow V(E) = \int_T |f(x,y)|\,dT .$$

Chiamiamo ora dominio normale rispetto all'asse x, un dominio di questo tipo:

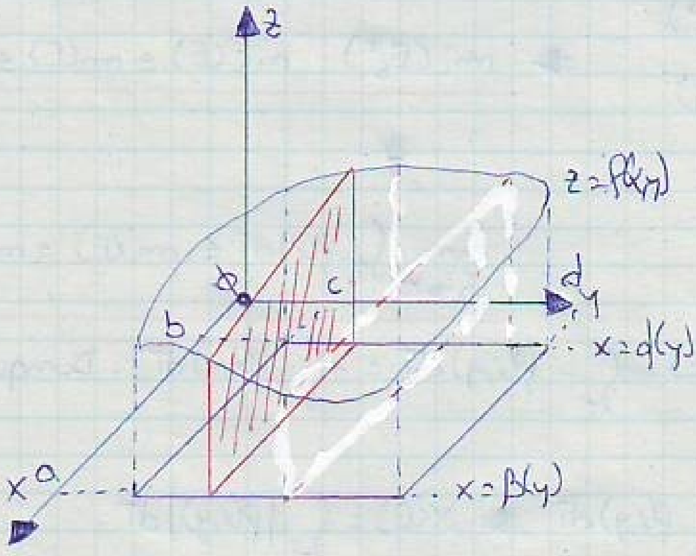


$$\begin{cases} \alpha(y) \le x \le \beta(y), & \alpha, \beta \in C^0(a,b) \\ c \le y \le d \end{cases}$$

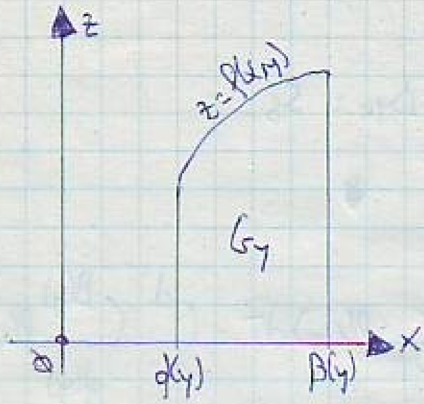
L'insieme T è normale all'asse x se e solo se la retta parallela all'asse x interseca due volte T. Analogamente T è normale rispetto a y se:



Sia ora $f(x,y)$ una funzione e $\int_T f(x,y)\,dT$ il suo integrale doppio. Sia poi $f(x,y) \ge 0$ in T:



Se E è il cilindroide considerato, $V(E) = \int_T f(x,y)\,dT$ è il suo volume. Per calcolare il volume si può dividere il cilindroide in tante parti parallele a xz.



Area trapezoidale:

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = A(G_y)$$

Successivamente si ha che:

$$\boxed{V(\Omega) = A(G_y) \cdot \Delta y}$$

Siccome però le altezze del cilindroide variano, bisogna:

1) Suddividere l'intervallo cd in parti uguali.

$$\int_c^d F_y\,dy \quad \text{e' il corrispondente integrale.}$$

2) Preso un $\varepsilon_k \in (y_{m-1}, y_{m-1})$ si ha:

$$\sum_1^m {}_k F(\varepsilon_k) \cdot \Delta y_k = S_\delta$$

3) $\delta = \max \Delta y_k$

4) $\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \int_c^d F(y)\,dy.$

Essendo poi:

$$\Omega = \Omega_1 + \dots + \Omega_m$$

si ha che:

$$V(\Omega) = \sum_1^m {}_k V(\Omega_k) = \sum_1^m {}_k A(G_y)\,\Delta y_k = \sum_1^m {}_k \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right] \Delta y_k$$

$\Downarrow$

$$\text{se} \quad \sum_{1}^{m} {}_k \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right] \Delta y_k = S_\delta$$

$\Downarrow$

$$\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \lim_{\delta \to 0} V(R_\delta) = V(E) = \int_T f(x,y)\,dT = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Dunque la formula che permette di ridurre l'integrale doppio in due integrali semplici è la seguente:

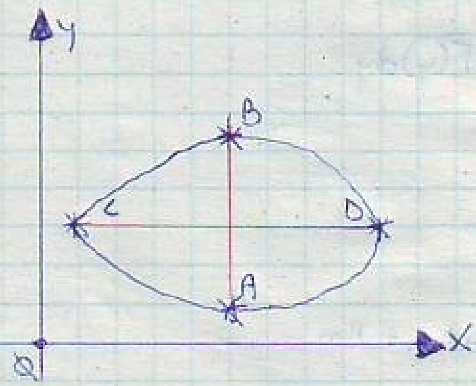
$$\boxed{\int_T f(x,y)\,dT = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy}$$

Questa formula viene detta formula di scomposizione di un integrale doppio. Se la funzione f in T non è sempre positiva, si ha che in T la f cambia, ma la formula di scomposizione vale ugualmente. In realtà le formule di scomposizione sono due:

1) $\int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$

2) $\int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy$

Prendiamo ora in esame un dominio del seguente tipo:



$$\begin{cases} \widehat{ACB} \Rightarrow x = \alpha(y) \\ \widehat{BDA} \Rightarrow x = \beta(y) \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} \alpha(y) \le x \le \beta(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$$

Dunque il dominio T è normale all'asse X: