

$$\phi(x) = Ce^x$$

Quindi:

$$\vec{V}(x,y) = (e^x(1+x) \log y) \vec{i} + \frac{e^x}{y} \vec{j}$$



$$P(x,y) = C \left(\int_{x_0}^x e^x(1+x) \log y \, dx + \int_{y_0}^y x e^{x_0} \frac{1}{y} \, dy \right) = x e^x \log y - x_0 e^{x_0} \log y + C x e^x \log y$$

Avendo posto $x_0 = 0$, dunque il valore L compreso dal vettore $\vec{V}(x,y)$ è:

$$L = P(B) - P(A) = P(A) - P(B) = C 2e^2$$

$$\text{Apponendo } L=1 \Rightarrow 2Ce^2=1 \Rightarrow C = \frac{1}{2e^2} \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{2} e^{x-2}.$$

10. 10

10. 10

10. 10

10. 10

10. 10

10. 10

10. 10

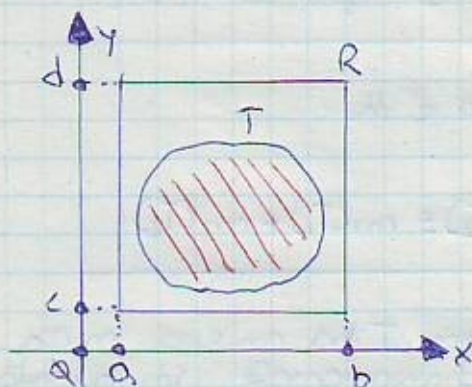
10. 10

*INTEGRALI DOPPI:

Prendiamo un insieme T chiuso e limitato del piano xy e sia R un dominio rettangolare contenente T , tale che:

$$R = \{ a \leq x \leq b; c \leq y \leq d \}$$

Graficamente si ha:

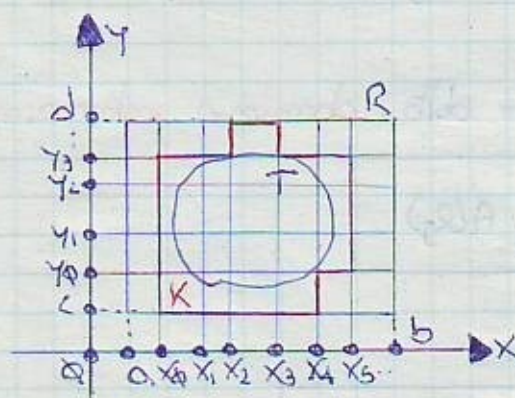


Si scompone ora R in tanti rettangolini in modo che:

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

Una decomposizione di R di questo tipo prende le mosse di **decomposizione costante**. Prendiamo ora in considerazione un insieme K con $K \subset R$, formato da tutti i rettangolini contenenti, o proprio interno o sulla frontiera, almeno un punto di T . Graficamente si ha:



$$K = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m$$

Il dominio così ottenuto K viene detto **estremamente associato a T** . La misura di K lo indicheremo così:

$$m(K) = \sum_{j=1}^m A(R_j)$$

La misura secondo Lebesgue dell'insieme T è data da:

$$m(T) = \inf (m(K))$$

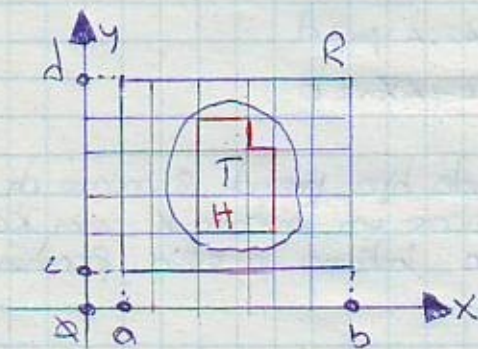
Ovviamente quando $m(T) > 0$, si ha che $m(K) > 0, \forall K$. Siamo ora T_1, T_2 due insiemi chiusi e limitati. Si ha che:

$$m(T_1) \leq m(T_2) \text{ quando } T_1 \subseteq T_2$$

Un'altra proprietà importante è che:

$$m(T_1 \cup T_2) \leq m(T_1) + m(T_2)$$

Se $m(T) = 0$, allora l'insieme T ha misura nulla. Questo tipo di misura viene anche detta misura bidimensionale, in quanto T appartiene a un piano bidimensionale (x, y) . Anche l'insieme vuoto ha misura bidimensionale nulla. Pensiamo ora, in es. come $\mathbb{R}$ seguente caso:



$$H = R_1 \cup \dots \cup R_m$$

In questo caso l'insieme H viene detto **dominio internamente associato**.

$$m(H) = \sum_{j=1}^m A(R_j)$$

Dunque si ha secondo Lebesgue:

$$m(T) = \sup m(H)$$

Sia, per quanto riguarda il dominio internamente associato che per quello esternamente associato si ha:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m(K_\delta) = m(T)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m(H_\delta) = m(T)$$

dove δ è la δ -massima dei rettangolini. δ massima è la diagonale maggiore tra tutte le diagonali dei rettangolini. Valiamo ora alcune proprietà:

$$1) m(A_1) \leq m(A_2) \quad \text{se } A_1 \subseteq A_2$$



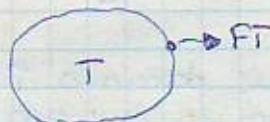
$$2) m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1 + A_2)$$

Definiamo ora un nuovo concetto. Supponiamo di avere un insieme T chiuso e limitato contenente dei punti interni.

$$m(T) \neq \emptyset$$

Sia A un corpo, cioè un insieme aperto e limitato. Allora si ha:

$$T = A \cup FT$$



dove FT è la frontiera di T . Quest'ultima relazione prende il nome di **formula di decomposizione**. Dimostriamo ora che:

$$m(T) = m(A) + m(FT)$$



$$m(T) = m(A) \quad \text{se } m(FT) = 0$$

Siccome la misura di A si ottiene:

$$m(A) = m_i(A) + m(FA)$$

dove $m_i(A)$ è la **misura interna** di A , si ha che:

$$m(A) = m_i(T)$$

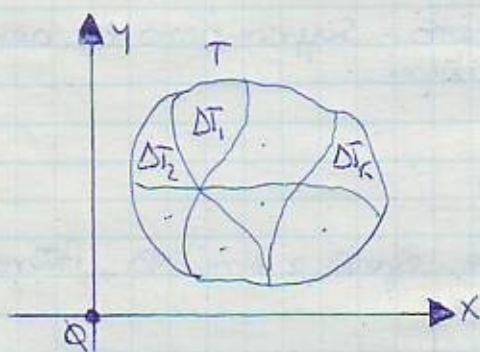
Ovviamente $m(T) \geq m_i(T)$. Un insieme si dice **quadrabile** quando:

$$m_i(T) = m(T) \quad , \quad \text{con } m(FT) = 0$$

Ad esempio una linea regolare o generalmente regolare è quadrabile perché $m(FT) = 0$. Si evidenzia infine questa importantissima proprietà:

$$A(T) = m(T) = \inf(m(K)) = m_i(T) = m(A) = \sup m(H)$$

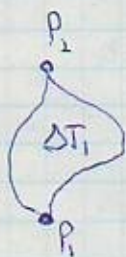
Prendiamo ora in esame il seguente insieme T quadrabile:



Effettuiamo sul dominio T una **decomposizione regolare**, cioè si scompone l'insieme T in un numero infinito di domini tutti quadrabili. Dunque:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A(T_j) = A(T)$$

Prendiamo ora in esame un dominio a caso:



Si definisce **diametro** la massima distanza tra i due punti P_1 e $P_2 \in \Delta_1$. In un rettangolo per esempio, la diagonale è il diametro.

Dopo la decomposizione di T si ha:

$$T = \Delta T_1 \cup \Delta T_2 \cup \dots \cup \Delta T_m$$

dove ogni ΔT ha un suo diametro. Sia poi $P_k \in \Delta T_k$ un punto interno al dominio, si ha:

$$\sum_{k=1}^m P(P_k) \cdot A(\Delta T_k) = S_\delta$$

Effettuando il limite si ha:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta = \int_T P(x, y) dT$$

dove δ è il massimo dei diametri ($\sup d(P_1, P_2) = \delta$). Quest'ultimo integrale prende il nome di **integrale doppio esteso a T** . Vediamo ora alcune proprietà di questo integrale doppio:

1) se $\int_T P(x, y) dT \geq 0 \Rightarrow P(x, y) \geq 0$

2) l'integrale doppio è un operatore lineare. Un operatore α è **lineare** se soddisfa le proprietà:

2.1) $\alpha(P+P_2) = \alpha(P) + \alpha(P_2)$

2.2) $\alpha(c \cdot P) = c \cdot \alpha(P)$

3) se $P(P) \leq g(P) \Rightarrow \int_T P(P) dT \leq \int_T g(P) dT$

4) se $P(P) > 0 \Rightarrow P(P) = |P(P)|$

5) se $P(P) < 0 \Rightarrow P(P) = -|P(P)|$

6) $-|P| \leq P(P) \leq |P| \Rightarrow -\int_T |P| dT \leq \int_T P(P) dT \leq \int_T |P| dT$